전약이론과
힉스 메커니즘의 이해

2022/05/03

KCMS Lectures on Collider Physics

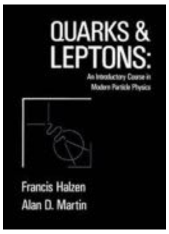
박인규
서울시립대학교

KCMS Lecture series 강의 계획

주차	날짜	강의 제목	담당 교수
제 1주	2022/03/08	KCMS Lecture series의 소개	강의 공지 (이메일)
제 2주	2022/03/15	QCD와 Jet Physics 소개 (1/2)	세종대 김용선 교수
제 3주	2022/03/22	중이온 물리로의 초대	전남대 문동호 교수
제 4주	2022/03/29	봄방학	
제 5주	2022/04/05	CMS Top Physics 소개 (1/2)	한양대 김태정 교수
제 6주	2022/04/12	CMS Top Physics 소개 (2/2)	한양대 김태정 교수
제 7주	2022/04/19	QCD와 Jet Physics 소개 (2/2)	세종대 김용선 교수
제 8주	2022/04/26	중간 평가	
제 9주	2022/05/03	Higgs Mechanism의 이해	시립대 박인규 교수
제10주	2022/05/10	CMS Higgs Physics 소개	서울대 양운기 교수
제11주	2022/05/17	중성미자 물리 (지하실험과 가속기 활용)	세종대 김현수 교수
제12주	2022/05/24	보강 주간	
제13주	2022/05/31	CMS SUSY 연구 소개	고려대 유재혁 교수
제14주	2022/06/07	BSM과 CMS EXO 연구 소개 (1/2)	경북대 문창성 교수
제15주	2022/06/14	BSM과 CMS EXO 연구 소개 (2/2)	경북대 문창성 교수
제16주	2022/06/21	기말 평가	

목차

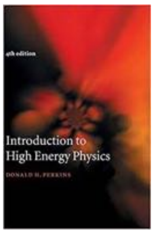
참고 서적



Halzen & Martin
1991

Chap.13: EW
Chap.14: GT
Chap.15: Higgs

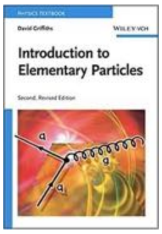
K-G SSB
U(1) SSB
SU(2) SSB
SM Higgs



Donald Perkins
2000

Chap.9: EW

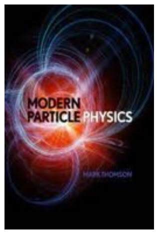
3rd: Higgs (x)



David Griffiths
2008

Chap.9: EW
Chap.10: GT

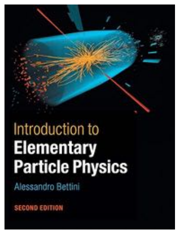
KG SSB



Mark Thomson
2013

Chap. 15: EW
Chap. 17: Higgs

K-G SSB
U(1) SSB
SM Higgs



Alessandro Bettini
2014

Chap.9: SM

SSB
SM Higgs
Experimental

책마다 다른 정의들

	Principal notations		Other notations	
metric	(1,-1,-1,-1)	Particle Physics	(-1,1,1,1)	General Relativity
hyper-charge	$Q = \frac{1}{2}Y + I_3$	HM,G,T,B	$Q = Y + I_3$	P
current	$j_+^\mu = \bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L, \quad j_-^\mu = \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L$	HM,G,T,B	$j_+^\mu = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L, \quad j_-^\mu = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L$	T
gauge transform	$\psi' = e^{iq\chi(x)}\psi$	HM,P,T	$\psi' = e^{-iq\chi(x)}\psi$	G
	$\partial_\mu \psi' = e^{iq\chi(x)} \partial_\mu \psi + iqe^{iq\chi(x)} \psi \partial_\mu \chi(x)$	HM,P,T	$\partial_\mu \psi' = e^{-iq\chi} \partial_\mu \psi - iqe^{-iq\chi} \psi \partial_\mu \chi(x)$	G
covariant derivative	$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$	HM,P,T	$D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$	G
	$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi(x)$	HM,P,T	$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi(x)$	G
QED Lagrangian	$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\,\overline{\psi}\psi - q\,\overline{\psi}\gamma^\mu \psi\, A_\mu$	HM,P,G,T		
Weak isospin current	$j_\pm^\mu = j_1^\mu \pm i\, j_2^\mu$	HM,G,T,B		
Weak gauge bosons	$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1 \mp iW_2)$	HM,G,T	$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1 \pm iW_2)$	P,B
Interaction Lagrangian	$\frac{g}{\sqrt{2}}\left(j_+^\mu W_\mu^+ + j_-^\mu W_\mu^-\right)$	HM,G,T	$\frac{g}{\sqrt{2}}\left(j_-^\mu W_\mu^+ + j_+^\mu W_\mu^-\right)$	P,B
potential for K-G SSB	$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$	HM, T	$V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4$	G

기초 지식

고전역학

▪ 뉴턴 역학

- 힘과 가속도: $\vec{F} = m\vec{a}$
- 힘은 포텐셜의 변화율(gradient): $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$

$$m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = -\vec{\nabla}U$$

▪ 라그랑지안 역학

- 라그랑지안: $L = T - U$
  - ◆ 운동에너지 $T = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

동등하다!

고전역학 vs 장론

▪ 고전역학

- 입자 → 입자 위치의 시간 변화 $x(t), y(t), z(t)$
- 라그랑지안 (L)→ 운동에너지와 포텐셜에서 얻는다.
- 오일러-라그랑쥬 방정식

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

▪ 장론

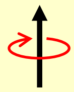
- 장 → 장의 시공간 변화 $\phi_i(x, y, z, t)$
  - ◆ 실내 온도분포: $T(x, y, z, t)$, 전기포텐셜: $V(x, y, z, t)$, 자기장분포: $\vec{B}(x, y, z, t)$
- 라그랑지안 밀도($\mathcal{L}$) → 감으로 얻는다!
  - ◆ 라그랑지안에 상수를 더하거나 곱하거나, 또는 ϕ_i나 $\partial_\mu\phi_i$로 만들어진 벡터함수의 발산 ($\partial_\mu f^\mu$)항을 넣어도 오일러-라그랑쥬 방정식이 변하지 않는다.
- 오일러-라그랑쥬 방정식
  - ◆ $q_i \to \phi_i$, $\dot{q}_i \to \partial_\mu\phi_i$

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i}$$

* $\partial_\mu\phi_i \equiv \frac{\partial\phi_i}{\partial x^\mu}$

스핀과 색깔로 본 페르미온들

left



$\begin{pmatrix} \circ\ \nu_e \\ \bullet\ e_L \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \circ\ \nu_\mu \\ \bullet\ \mu_L \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \circ\ \nu_\tau \\ \bullet\ \tau_L \end{pmatrix}$

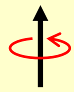
$\begin{pmatrix} u_L & u_L & u_L \\ d'_L & d'_L & d'_L \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} c_L & c_L & c_L \\ s'_L & s'_L & s'_L \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} t_L & t_L & t_L \\ b'_L & b'_L & b'_L \end{pmatrix}$

약 아이소스핀 이중항 $(I_W = \frac{1}{2})$

$$l\begin{pmatrix} I_z = +\frac{1}{2} \\ I_z = -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$$

$$q\begin{pmatrix} I_z = +\frac{1}{2} \\ I_z = -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix}$$

right



$\bullet\ e_R$ $\bullet\ \mu_R$ $\bullet\ \tau_R$

$u_R\ u_R\ u_R$ $c_R\ c_R\ c_R$ $t_R\ t_R\ t_R$

$d_R\ d_R\ d_R$ $s_R\ s_R\ s_R$ $b_R\ b_R\ b_R$

약 아이소스핀 단일항 $(I_W = 0)$

$$l(I_z = 0) = e_R, \mu_R, \tau_R$$

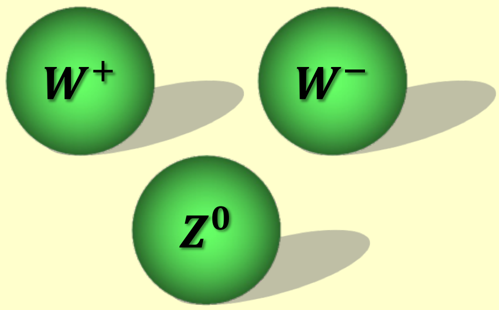
$$q(I_z = 0) = u_R, c_R, t_R, d_R, d_R, b_R$$

다양한 약 상호작용 반응들

- **Leptonic 반응들: 경입자들로만 이루어진 반응**
  - 뮤온입자의 붕괴: $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ (하전 약 상호작용, CC)
  - 전자-중성미자 충돌: $\nu_\mu + e^- \to \nu_e + \mu^-$ (중성 약 상호작용, NC)
- **Semi-leptonic 반응들: 강입자와 경입자가 둘 다 나타나는 반응**
  - 베타붕괴: $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$ (CC)
  - 중성미자와 핵자와의 충돌: $\nu_\mu + p \to \nu_\mu + p$ (NC)
- **Non-leptonic (Hadronic) 반응들: 강입자들로만 이루어진 반응**
  - 중입자의 붕괴: $\Lambda^0(uds) \to p(uud) + \pi^-(d\bar{u})$ $(s \to u + \bar{u} + d)$ (CC)

약 상호작용의 특징

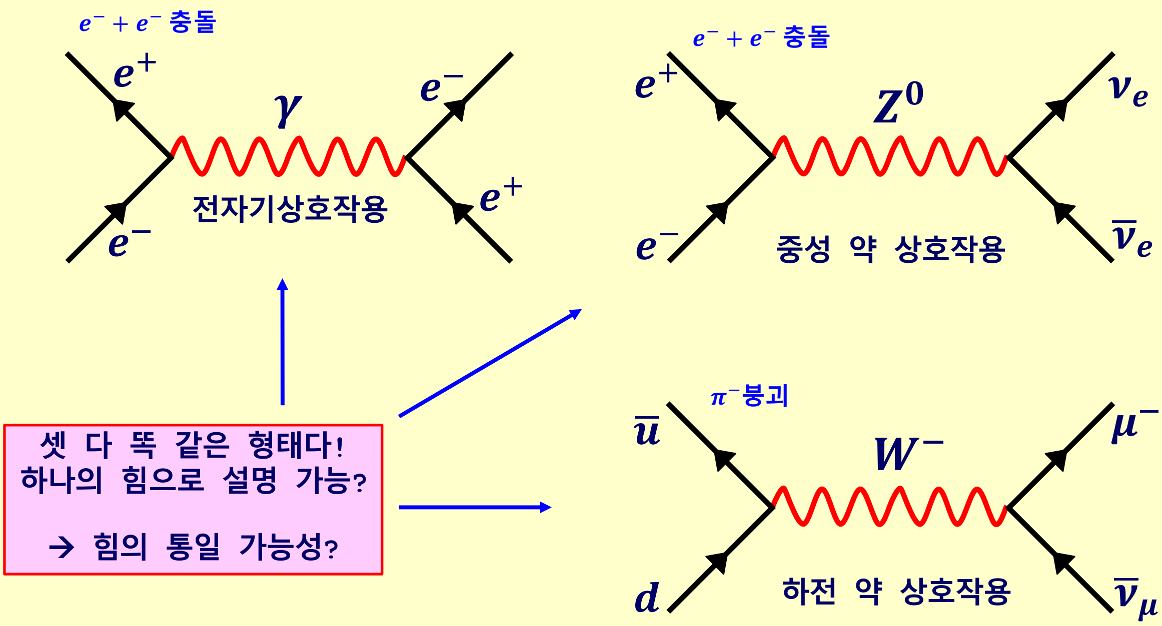
- **무거운 매개입자를 통해 힘을 전달한다.**
  - 매우 짧은 거리에서만 작용한다.
    - 매개입자의 질량이 반응 전후 입자의 질량보다 크다
      - ✓ 불확정성의 원리: $\Delta E \Delta t \sim \hbar$
- **입자들을 붕괴 시킨다.**
  - 결합상태를 만들지 않는다.
    - 전자기 상호작용→ 수소원자
    - 강한 상호작용→ 중간자, 중입자
    - 중력→ 태양계



- **약한 상호작용을 매개하는 벡터 보존**
  - 하전 W^+, W^-
    - $M_W = 80.379 \pm 0.012\ \mathrm{GeV/c^2}$
  - 중성 Z^0
    - $M_Z = 91.188 \pm 0.002\ \mathrm{GeV/c^2}$

전자기 상호작용과 약 상호작용

- **전자기 상호작용과 약 상호작용은 매우 비슷하다.**



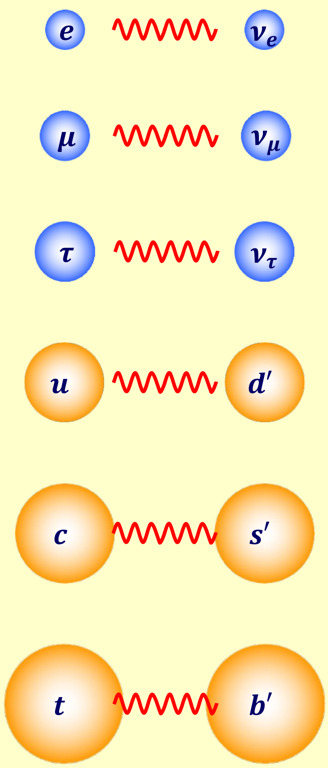
하전 약 상호작용

13

하전 약 상호작용의 특징

- **같은 세대, 왼손지기 입자만!!**
  - 경입자
    - $\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau\end{pmatrix}$
      - ✓ $e^- \to \nu_e + W^-$
      - ✓ $\mu^- \to \nu_\mu + W^-$
      - ✓ $\tau^- \to \nu_\tau + W^-$
  - 쿼크
    - $\begin{pmatrix}u\\ d'\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c\\ s'\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\ b'\end{pmatrix}$
      - ✓ $u \to d' + W^+$
      - ✓ $c \to s' + W^+$
      - ✓ $t \to b' + W^+$

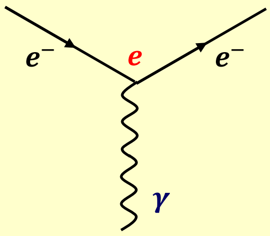
$$\boxed{\begin{pmatrix}d'\\ s'\\ b'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}V_{ud} & V_{us} & V_{ub}\\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb}\\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d\\ s\\ b\end{pmatrix}}$$



14

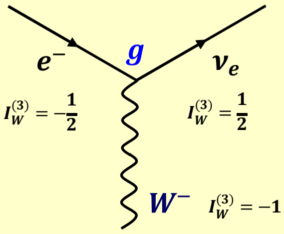
전자기 상호작용과 하전 약 상호작용

$$j^{\mu}_{em} = Q\,\bar{e}\,\gamma^{\mu}\,e$$

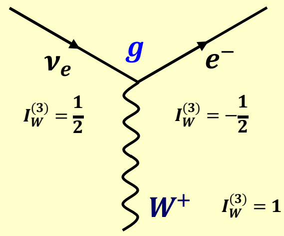


$$\mathcal{L}_{em} = e\,j^{\mu}_{em}\,A_{\mu}$$

$$j^{\mu}_{+} = \bar{\nu}_L\,\gamma^{\mu}\,e_L$$



$$j^{\mu}_{-} = \bar{e}_L\,\gamma^{\mu}\,\nu_L$$

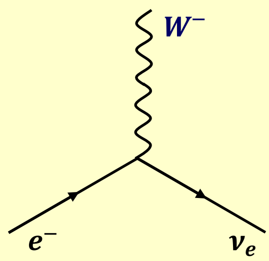


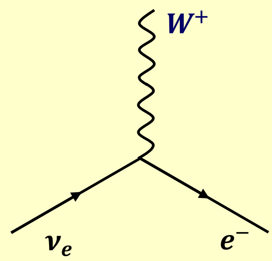
$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}}\left(j^{\mu}_{+}W^{+}_{\mu} + j^{\mu}_{-}W^{-}_{\mu}\right)$$

$$u(p_e) \equiv e,\ \bar{u}(p_e) \equiv \bar{e}$$
$$v(p_{e^+}) \equiv e^+,\ \bar{v}(p_{e^+}) \equiv \bar{e}^+$$

약 아이소스핀의 도입

- **두 가지 약한 흐름**
  - $j^{\mu}_{+} = \bar{\nu}_L\,\gamma^{\mu}\,e_L$
  - $j^{\mu}_{-} = \bar{e}_L\,\gamma^{\mu}\,\nu_L$
- **중성미자와 전자의 이중항 표현**
  - $\chi_L = \begin{pmatrix}\nu_e \\ e\end{pmatrix}_L$
- **파울리 행렬을 도입**
  - $j^{\mu}_{\pm} = \bar{\chi}_L\,\gamma^{\mu}\,\tau_{\pm}\,\chi_L$
    - 두 가지 약한 흐름을 통합적으로 표현할 수 있다.
      - ✓ $j^{\mu}_{+} = \bar{\chi}_L\,\gamma^{\mu}\tau_{+}\,\chi_L = (\bar{\nu}_e\,\bar{e})_L\,\gamma^{\mu}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_e \\ e\end{pmatrix}_L = \bar{\nu}_L\,\gamma^{\mu}\,e_L$
      - ✓ $j^{\mu}_{-} = \bar{\chi}_L\,\gamma^{\mu}\tau_{-}\,\chi_L = (\bar{\nu}_e\,\bar{e})_L\,\gamma^{\mu}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_e \\ e\end{pmatrix}_L = \bar{e}_L\,\gamma^{\mu}\,\nu_L$
    - 두 가지 성분으로 나누어 쓸 수 있다.
      - ✓ $j^{\mu}_{1} = \bar{\chi}_L\,\gamma^{\mu}\frac{\tau_1}{2}\,\chi_L,\quad j^{\mu}_{2} = \bar{\chi}_L\,\gamma^{\mu}\frac{\tau_2}{2}\,\chi_L$
      - ✓ $j^{\mu}_{\pm} = j^{\mu}_{1} \pm i\,j^{\mu}_{2}$





$$j^{\mu}_{+} = \bar{\nu}_L\,\gamma^{\mu}\,e_L \qquad j^{\mu}_{-} = \bar{e}_L\,\gamma^{\mu}\,\nu_L$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$
$$\tau_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$$

$$\tau_{\pm} = \frac{1}{2}(\tau_1 \pm i\tau_2)$$
$$\tau_{+} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$\tau_{-} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

약 아이소스핀과 약 초전하

17

문득 떠오르는 질문 1

$$j_1^\mu = \overline{\chi}_L \gamma^\mu \frac{\tau_1}{2} \chi_L, \qquad j_2^\mu = \overline{\chi}_L \gamma^\mu \frac{\tau_2}{2} \chi_L$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

제3의 아이소스핀 흐름?

$$j_3^\mu\ ??$$

제3의 약 아이소스핀 흐름?

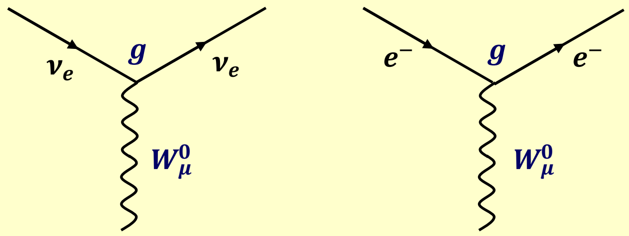
- 약 아이소스핀 흐름
  - $j_1^\mu = \overline{\chi}_L \gamma^\mu \frac{\tau_1}{2} \chi_L$과 $j_2^\mu = \overline{\chi}_L \gamma^\mu \frac{\tau_2}{2} \chi_L$
    - 파울리 행렬에는 τ_3 도 있다.

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- 혹시 제3의 약 아이소스핀 흐름이 있다면?
  - $j_3^\mu = \overline{\chi}_L \gamma^\mu \frac{\tau_3}{2} \chi_L$
    - $j_3^\mu = \frac{1}{2}(\overline{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L - \overline{e}_L \gamma^\mu e_L)$
      - ✓ 왼손지기 입자에만 반응하는 중성 흐름이 있지 않을까?



문득 떠오르는 질문 2

아이소스핀 → 초전하?

$$\boxed{Q = \frac{1}{2}Y + I_3} \longrightarrow \boxed{Q = \frac{1}{2}Y_W + I_W^{(3)}}$$

Y_W?

약 아이소스핀과 약 초전하

- 강력에 있어 양성자와 중성자는 대칭
  - 아이소스핀의 도입

$$Q = \frac{1}{2}Y + I_3$$

핵자	전하 (Q)	아이소스핀 (I_3)	초전하 (Y)
양성자	1	1/2	1
중성자	0	-1/2	1

- 약력에 아이소스핀 대칭성을 부여
  - 약 아이소스핀 (I_W)
  - 약 초전하 (Y_W)

페르미온	Q	$I_W^{(3)}$	Y_W
ν_L	0	1/2	-1
e_L	-1	-1/2	-1
u_L	2/3	1/2	1/3
d'_L	-1/3	-1/2	1/3

약 아이소스핀과 약 초전하

- 하전 약 상호작용은 왼손잡이냐 오른손잡이냐에 따라 다르다
  - 왼손지기 입자에는 아이소스핀을 부여

왼손지기	Q	$I_W^{(3)}$	Y_W
ν_L	0	1/2	-1
e_L	-1	-1/2	-1
u_L	2/3	1/2	1/3
d'_L	-1/3	-1/2	1/3

  - 오른손지기 입자는 아이소스핀 없음

오른손지기	Q	$I_W^{(3)}$	Y_W
e_R	-1	0	-2
u_R	2/3	0	4/3
d_R	-1/3	0	-2/3

약 초전하 흐름

- 약 아이소스핀 흐름이 있다면, 혹시 약 초전하 흐름도 있지 않을까?
  - 약 초전하 (weak hypercharge)
    - $Y_W = 2(Q - I_W^{(3)})$
  - 약 초전하 흐름(weak hypercharge)을 가정해보자
    - $j_Y^\mu = 2(j_{em}^\mu - j_3^\mu)$

$Q = \frac{1}{2} Y_W + I_W^{(3)}$

$$= 2\left(Q\bar{\psi}\,\gamma^\mu\,\psi - \bar{\chi}_L\,\gamma^\mu \frac{\tau_3}{2}\,\chi_L\right)$$
$$= 2(-\bar{e}_L\gamma^\mu e_L - \bar{e}_R\gamma^\mu e_R) - (\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L - \bar{e}_L\gamma^\mu e_L)$$
$$= -2\,\bar{e}_R\gamma^\mu e_R - \bar{e}_L\,\gamma^\mu\,e_L - \bar{\nu}_L\,\gamma^\mu\,\nu_L$$

$$\boxed{j_Y^\mu = -2\bar{e}_R\gamma^\mu e_R - \bar{e}_L\gamma^\mu e_L - \bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L = \bar{\psi}\,\gamma^\mu\,Y\,\psi}$$

전자기력과 약력의 통합 가능성

- 전자기력에서의 페르미온 흐름
  - $j_{em}^\mu = -\bar{e}_L\,\gamma^\mu\,e_L - \bar{e}_R\,\gamma^\mu\,e_R$

$\boxed{j_{em}^\mu = \bar{\psi}\,\gamma^\mu Q\psi}$

- 약력에서의 페르미온 흐름
  - $j_+^\mu = \bar{\nu}_L\,\gamma^\mu\,e_L$
  - $j_-^\mu = \bar{e}_L\gamma^\mu\nu_L$
  - $j_3^\mu = \frac{1}{2}(\bar{\nu}_L\,\gamma^\mu\,\nu_L - \bar{e}_L\,\gamma^\mu\,e_L)$
  - $j_Y^\mu = -\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L - \bar{e}_L\gamma^\mu e_L - 2\bar{e}_R\gamma^\mu e_R$

$\boxed{j_\pm^\mu = \bar{\psi}_L\,\gamma^\mu\,\tau_\pm\,\psi_L}$

$\boxed{j_3^\mu = \bar{\psi}_L\,\gamma^\mu I_W^{(3)}\psi_L}$

$\boxed{j_Y^\mu = \bar{\psi}\,\gamma^\mu\,Y\,\psi}$

꼴이 똑같다!

$\boxed{Q = \frac{1}{2}Y + I_3}$

$$j_{em}^\mu = \frac{1}{2} j_Y^\mu + j_3^\mu$$

약 아이소스핀 흐름의 제3성분과 약 초전하 흐름의 합이 전기흐름이다!

전자기력과 약력의 통합 가능성

전약 이론 (Electroweak theory)

S. Bludman: '중성' 약한 상호작용이 있을 수 있다고 생각 (1958)

- 전자기력과 약력의 이론적 통합
  - 글라쇼: 무거운 벡터 보존을 도입하여 시도
    - S.L. Glashow, Nuclear Physics, 22, 579 (1961)
      - ✓ 약한 상호작용을 매개하는 보존이 왜 질량을 갖게 되는 지 설명할 필요가 생김
  - 와인버그, 살람: 힉스 메커니즘을 이용해 게이지보존에 질량을 부여
    - S. Weinberg, Physical Review Letters 19, 1264 (1967)
    - A. Salam, Elementary Particle Theory (1968)
  - 투프트: 재규격화 가능함을 증명
    - 't Hooft, Nuclear Physics B-35, 167-188 (1971)

1932- 1979
Sheldon Glashow

1933- 1979
Steven Weinberg

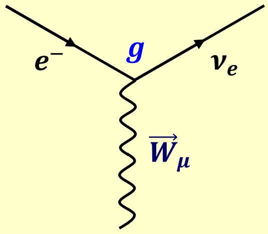
1926-1996 1979
Abdus Salam

"for their contributions to the theory of the unified weak and electromagnetic interaction between elementary parti cles, including the prediction of the weak neutral current"

약 아이소스핀과 약 초전하 흐름

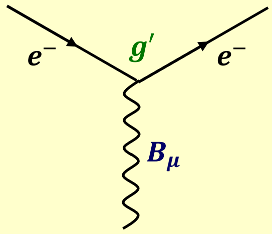
▪ 약 아이소스핀

- 약 아이소스핀의 흐름: $j_1^\mu, j_2^\mu, j_3^\mu$
  - ◆ $j_i^\mu = \overline{\chi}_L \gamma^\mu \frac{\tau_i}{2} \chi_L$
    - ✓ $j_3^\mu = \overline{\psi}_L \gamma^\mu I_W^{(3)} \psi_L$
- 게이지 장: $W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3$
- 결합상수: g



▪ 약 초전하

- 약 초전하의 흐름: j_Y^μ
  - ◆ $j_Y^\mu = \overline{\psi} \gamma^\mu Y \psi$
- 게이지 장: B_μ
- 결합상수: g'



EW 모델

▪ SU(2)xU(1)

- 약 아이소스핀 흐름 $\vec{j}^\mu$ + 결합상수 g + 벡터 장 $\vec{W}_\mu$
  - ◆ $\mathcal{L}_{SU(2)} = g\, \vec{j}^\mu \cdot \vec{W}_\mu$
- 약 초전하 흐름 j_Y^μ + 결합상수 g' + 벡터 장 B_μ
  - ◆ $\mathcal{L}_{U(1)} = g' \frac{1}{2} j_Y^\mu B_\mu$

$$\boxed{\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SU(2)} + \mathcal{L}_{U(1)} = g\, \vec{j}^\mu \cdot \vec{W}_\mu + g' \frac{1}{2} j_Y^\mu B_\mu}$$

$$= g\, j_1^\mu W_\mu^1 + g\, j_2^\mu W_\mu^2 + g\, j_3^\mu W_\mu^3 + g' \frac{1}{2} j_Y^\mu B_\mu$$

$$j_\pm^\mu = j_1^\mu \pm i\, j_2^\mu$$

$$= \underbrace{\frac{g}{\sqrt{2}} (j_+^\mu W_\mu^+ + j_-^\mu W_\mu^-)}_{\text{CC}} + \underbrace{g\, j_3^\mu W_\mu^3 + g' \frac{1}{2} j_Y^\mu B_\mu}_{\text{NC}}$$

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_1 \mp i W_2)$$

$$\boxed{\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}} (j_+^\mu W_\mu^+ + j_-^\mu W_\mu^-)}$$

$$\boxed{\mathcal{L}_{NC} = g\, j_3^\mu W_\mu^3 + g' \frac{1}{2} j_Y^\mu B_\mu}$$

중성흐름 부분

- **중성 흐름 부분을 눈여겨 보자**
  - $\mathcal{L}_{NC} = g\, j_3^\mu\, W_\mu^3 + g'\, \frac{1}{2}\, j_Y^\mu\, B_\mu$

"Whatever the final laws of nature may be, there is no reason to suppose that they are designed to make physicists happy."

- **아주 신나는 경우**
  - 중성 약 상호작용
    - $\mathcal{L}_{NC} = g\, j_3^\mu\, W_\mu^3 \longrightarrow Z_\mu^0$ 약 중성흐름도 왼손지기 입자에만 작용!!
  - 중성 전자기 상호작용
    - $\mathcal{L}_{EM} = g'\, \frac{1}{2}\, j_Y^\mu\, B_\mu$
    - $g' \to e$, $j_Y^\mu \to j_{em}^\mu$, $B_\mu \to A_\mu$

- **신은 물리학자를 신나게 만들지 않는다!**
  - 자연은 단순하지 않다.

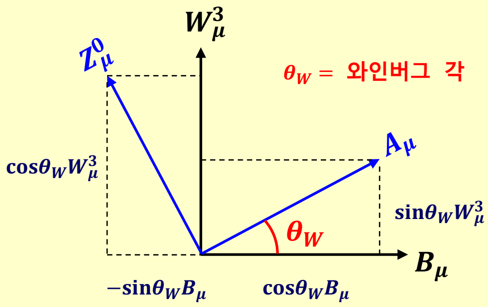
$$\mathcal{L}_{NC} = g\, j_Z^\mu\, Z_\mu^0 + e\, \frac{1}{2}\, j_{em}^\mu\, A_\mu \quad \textbf{(X)}$$

Electroweak mixing

- **실제로는 물리적인 장 A_μ와 Z_μ가 B_μ와 W_μ^3의 섞임 상태**

$$\boxed{\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & -\sin\theta_W \\ \sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}}$$



- $W_\mu^3 = \cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu$
- $B_\mu = -\sin\theta_W Z_\mu + \cos\theta_W A_\mu$

$$\mathcal{L}_{NC} = g\, j_3^\mu\, W_\mu^3 + g'\, \frac{1}{2}\, j_Y^\mu\, B_\mu$$

$$= \underbrace{\left[g\cos\theta_W\, j_3^\mu - g'\sin\theta_W\, \frac{1}{2}\, j_Y^\mu \right]}_{g_Z\, j_Z^\mu} Z_\mu + \underbrace{\left[g\sin\theta_W\, j_3^\mu + g'\cos\theta_W \frac{1}{2}\, j_Y^\mu \right]}_{e\, j_{em}^\mu} A_\mu$$

전기 흐름 부분

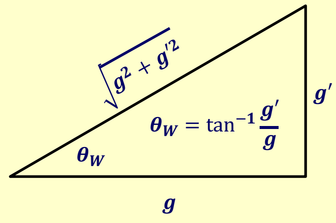
- $g\ \sin\theta_W\ j_3^\mu + g'\ \cos\theta_W \frac{1}{2}\ j_Y^\mu \rightarrow e\ j_{em}^\mu$

$\boxed{j_{em}^\mu = \frac{1}{2}\ j_Y^\mu + j_3^\mu}$

  - $j_{em}^\mu = \frac{1}{2}\ j_Y^\mu + j_3^\mu$ 이므로
    - $g\ \sin\theta_W = g'\cos\theta_W = e$ 이면 된다.

$$\boxed{g\ \sin\theta_W = g'\cos\theta_W = e}$$

- 전자기력과 약력의 세기 비
  - $\frac{\alpha}{\alpha_W} = \frac{e^2}{g^2} = \sin^2\theta_W$
    - 그럼 와인버그 각의 크기는 얼마인가?
      - ✓ 이론적으로 유도해 낼 수 없다!!



$\boxed{\sin^2\theta_W \cong 0.23}$ 실험으로 결정

$\theta_W \approx 28.7°$

$\boxed{\frac{g'}{g} = \frac{\sin\theta_W}{\cos\theta_W} = \tan\theta_W}$

중성 흐름 부분

- $g\ \cos\theta_W\ j_3^\mu - g'\sin\theta_W\ \frac{1}{2}\ j_Y^\mu \rightarrow g_Z\ j_Z^\mu$
  - W_μ^3과 B_μ를 Z_μ와 A_μ로

$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L}_{NC} = g\ j_3^\mu\ (\cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu) + g'\ \frac{1}{2}\ j_Y^\mu(-\sin\theta_W Z_\mu + \cos\theta_W A_\mu)$$

$$= \left[g\ \cos\theta_W\ j_3^\mu - g'\sin\theta_W\ \frac{1}{2}\ j_Y^\mu\right] Z_\mu + \left[g\ \sin\theta_W\ j_3^\mu + g'\ \cos\theta_W \frac{1}{2}\ j_Y^\mu\right] A_\mu$$

$g' = g\ \tan\theta_W$

$$= \left[g\ \cos\theta_W\ j_3^\mu - g\frac{\sin\theta_W}{\cos\theta_W}\sin\theta_W \frac{1}{2}\ j_Y^\mu\right] Z_\mu + g\ \sin\theta_W j_{em}^\mu A_\mu$$

$g\ \sin\theta_W = g'\cos\theta_W = e$

$$= \underbrace{\frac{g}{\cos\theta_W}}_{g_Z}\underbrace{\left[\cos^2\theta_W\ j_3^\mu - \sin^2\theta_W \frac{1}{2}\ j_Y^\mu\right]}_{j_Z^\mu} Z_\mu + e\ j_{em}^\mu A_\mu$$

$j_{em}^\mu = \frac{1}{2}\ j_Y^\mu + j_3^\mu$

$j_Z^\mu = j_3^\mu - \sin^2\theta_W\ j_{em}^\mu$

$\boxed{g_Z = \frac{g}{\cos\theta_W} = \frac{e}{\sin\theta_W\cos\theta_W}}$ $\boxed{j_Z^\mu = \cos^2\theta_W\ j_3^\mu - \sin^2\theta_W \frac{1}{2}\ j_Y^\mu}$

중성 흐름은 오른쪽 왼쪽 둘 다!

- j_Z^μ 의 성분을 왼손지기와 오른손지기로 분리해보자

$g_Z = \frac{g}{\cos\theta_W}$ $\quad \frac{g'}{g} = \frac{\sin\theta_W}{\cos\theta_W}$

  - $\psi = \psi_L + \psi_R, \quad \psi_L = \frac{1-\gamma^5}{2}\psi, \quad \psi_R = \frac{1+\gamma^5}{2}\psi$

$$j_Z^\mu = \cos^2\theta_W\, j_3^\mu - \sin^2\theta_W \tfrac{1}{2} j_Y^\mu$$

$$= \cos^2\theta_W\, I_W^{(3)} \bar\psi\,\gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2}\,\psi - \sin^2\theta_W\,\bar\psi\,\gamma^\mu \tfrac{1}{2} Y\,\psi$$

$j_3^\mu = I_W^{(3)} \bar\psi\,\gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2}\,\psi$ $\quad j_Y^\mu = \bar\psi\,\gamma^\mu\, Y\,\psi$

$$= \cos^2\theta_W\, I_W^{(3)} (\bar u_L\,\gamma^\mu\, u_L) - \sin^2\theta_W \left(\bar u_L \gamma^\mu \tfrac{1}{2} Y u_L + \bar u_R \gamma^\mu \tfrac{1}{2} Y u_R\right)$$

$I_W^{(3)} = 0$ for right

$$= \cos^2\theta_W\, I_W^{(3)} (\bar u_L\,\gamma^\mu\, u_L) - \sin^2\theta_W \left(\bar u_L \gamma^\mu\,(Q - I_W^{(3)}) u_L + \bar u_R \gamma^\mu (Q - I_W^{(3)}) u_R\right)$$

$Q = \frac{1}{2} Y_W + I_W^{(3)}$

$$= \bar u_L\,\gamma^\mu\, u_L \left[\cos^2\theta_W\, I_W^{(3)} - Q\sin^2\theta_W + \sin^2\theta_W\, I_W^{(3)}\right] + \bar u_R \gamma^\mu u_R [-\sin^2\theta_W\, Q]$$

$$= \left(I_W^{(3)} - Q\sin^2\theta_W\right) \bar u_L\,\gamma^\mu\, u_L - Q\sin^2\theta_W\, \bar u_R \gamma^\mu u_R$$

$$\equiv c_L\, \bar u_L\,\gamma^\mu\, u_L + c_R\, \bar u_R \gamma^\mu u_R$$

$$\boxed{c_L = I_W^{(3)} - Q\sin^2\theta_W} \qquad \boxed{c_R = -Q\sin^2\theta_W}$$

중성 흐름은 오른쪽 왼쪽 둘 다!

- $j_Z^\mu = c_L\,\bar u_L\,\gamma^\mu\, u_L + c_R\,\bar u_R \gamma^\mu u_R$
  - $\psi_L = \frac{1-\gamma^5}{2}\psi, \quad \psi_R = \frac{1+\gamma^5}{2}\psi$

$$j_Z^\mu = \bar\psi\gamma^\mu \left[c_L \frac{1-\gamma^5}{2} + c_R \frac{1+\gamma^5}{2}\right]\psi$$

$$= \bar\psi\gamma^\mu \tfrac{1}{2}\left[(c_L + c_R) - (c_L - c_R)\gamma^5\right]\psi$$

$$= \bar\psi\gamma^\mu \tfrac{1}{2}\left(c_V - c_A\gamma^5\right)\psi$$

$$\boxed{c_V = c_L + c_R = I_W^{(3)} - 2Q\sin^2\theta_W}$$

$$\boxed{c_V = c_L - c_R = I_W^{(3)}}$$

그럼 θ_W 는 얼마일까?

- 이론적으로 유도해 낼 수 있는 값은 아니다! → 실험적으로 결정
  - Z 보존과 페르미온과의 결합
    - $c_V = I_W^{(3)} - 2Q\sin^2\theta_W$
    - $c_A = I_W^{(3)}$
      - ✓ c_V를 측정하면 $\sin^2\theta_W$를 측정해낼 수 있다!

$$\boxed{\frac{c_V}{c_A} = 1 - \frac{2Q\sin^2\theta_W}{I_W^{(3)}}}$$

- 전자의 경우 $I_W^{(3)} = -\frac{1}{2}$ 이고 $Q = -1$
  - $\frac{c_V}{c_A} = 1 - 4\sin^2\theta_W$

$$\boxed{A_{FB} = \frac{\sigma_F - \sigma_B}{\sigma_F + \sigma_B} = \frac{3}{4}\mathcal{A}_e\mathcal{A}_\mu}$$

$$\boxed{\mathcal{A}_f = \frac{(c_L)^2 - (c_R)^2}{(c_L)^2 + (c_R)^2} = \frac{2c_Vc_A}{(c_V)^2 + (c_A)^2}}$$

$$A_{FB}^{e} = 0.0145 \pm 0.0025,\quad A_{FB}^{\mu} = 0.0169 \pm 0.0013 \text{ and } A_{FB}^{\tau} = 0.0188 \pm 0.0017.$$

$$\mathcal{A}_e = 0.1514 \pm 0.0019,\quad \mathcal{A}_\mu = 0.1456 \pm 0.0091 \text{ and } \mathcal{A}_\tau = 0.1449 \pm 0.0040,$$

M. Thomson

게이지 이론

게이지 이론

- **헤르만 바일: 게이지 이론의 창시 (1918)**
  - 전자기학의 게이지 대칭성에 착안
  - 일반상대론을 확장하여 게이지 대칭성으로부터 전자기학을 만들어 냄. 중력과 전자기력의 통합을 시도.
- **바일, 폭, 런던**
  - U(1) 게이지 대칭성을 파동함수에 요구하여 전자기 상호작용을 양자역학에 도입

Hermann Weyl
(1885-1955)

- **양, 밀즈: 비교환 게이지이론 (1954)**
  - U(1) 게이지이론을 확장하여 약력, 강력을 게이지이론화 하는 틀을 만들어 냄.

31.

Gravitation und Elektrizität

Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin
465—480 (1918)

전자기학에서의 게이지 대칭성

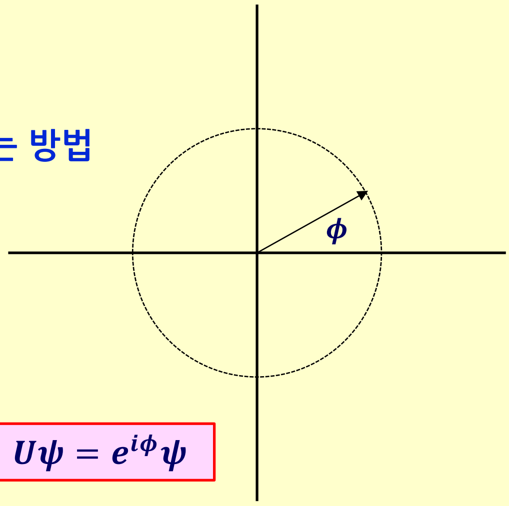
- **전기장($\vec{E}$)과 자기장($\vec{B}$)은 전기포텐셜과 자기포텐셜로 표현된다.**
  - $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$
  - $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

$$\boxed{\begin{aligned} A^\mu &= (\phi, \vec{A}) \\ A_\mu &= (\phi, -\vec{A}) \end{aligned}}$$

- **전역 게이지 변환**
  - $A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - A^0_\mu \qquad (\phi \to \phi' = \phi - \phi_0, \qquad \vec{A} \to \vec{A'} = \vec{A} + \vec{A}_0)$
    - $\vec{E'} = -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A'} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = \vec{E}$
    - $\vec{B'} = \vec{\nabla}\times\vec{A'} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}$
      - ✓ 포텐셜에 상수를 더해도 전자기학은 바뀌지 않는다.
- **국소 게이지 변환**
  - $A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\chi(x) \qquad (\phi \to \phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t}\chi(x), \qquad \vec{A} \to \vec{A'} = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi(x))$
    - $\vec{E'} = -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A'} = \cdots = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = \vec{E}$
    - $\vec{B'} = \vec{\nabla}\times\vec{A'} = \cdots = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}$
      - ✓ 스칼라 함수 $\chi(x^\mu)$의 gradient로 주어진 양은 게이지 장에 더해도 전자기학에 아무런 변화가 없다.
      - ✓ Local gauge symmetry

U(1) 대칭성

- 파동함수에 1을 곱하는 연산을 해도 물리에 변화가 없음
  - 대칭성
    - $\psi \rightarrow \psi' = 1\psi$
      - ✓ $\psi^{*\prime}\psi' = \psi^*\psi = 1$
- 복소 파동함수에 길이가 1인 모든 복소수를 곱해도 물리의 변화가 없음
  - 유니타리 변환: $U = e^{i\phi}$, $U^\dagger U = 1$
    - $\psi \rightarrow \psi' = U\psi = e^{i\phi}\psi$
      - ✓ $\psi^{\dagger\prime}\psi' = \psi^\dagger e^{-i\phi}e^{i\phi}\psi = \psi^\dagger\psi = 1$
- 2D 평면에서 반지름이 1인 모든 점을 표시하는 방법
  - 좌표계
    - $(x, y)\ \mid\ \sqrt{x^2+y^2} = 1$
  - 벡터
    - $x\hat{x} + y\hat{y}\ \mid\ \sqrt{x^2+y^2} = 1$
  - 극좌표
    - $(cos\phi, sin\phi)$
  - 복소 공간
    - $cos\phi + i\, sin\phi\ (= e^{i\phi})$



$$\boxed{\psi \rightarrow \psi' = U\psi = e^{i\phi}\psi}$$

디락장 라그랑지안의 위상변환

- 전역 위상변환 (Global phase transformation)
  - 입자를 기술하는 스피너를 모두 같은 위상 만큼 변환: θ 만큼 회전
    - $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\theta}\psi$

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = i\overline{\psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\psi' - \overline{\psi}'\psi' = i(\overline{\psi}e^{-i\theta})\gamma^\mu\partial_\mu(e^{i\theta}\psi) - \overline{\psi}e^{-i\theta}e^{i\theta}\psi = i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \overline{\psi}\psi = \mathcal{L}$$

✓ 라그랑지안에 변화가 없다.

- 국소 위상변환 (Local phase transformation)
  - 시공간에 위치에 따라 서로 다른 위상으로 변환: $\theta(x^\mu)$로 회전
    - $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\theta(x)}\psi$
      - ✓ $\partial_\mu(e^{i\theta(x)}\psi) = i\,\partial_\mu\theta(x)\, e^{i\theta(x)}\psi + e^{i\theta(x)}\partial_\mu\psi$ 으로 $i\,\partial_\mu\theta(x)\, e^{i\theta(x)}\psi$ 항이 생겨남

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = i(\overline{\psi}e^{-i\theta(x)})\gamma^\mu\partial_\mu(e^{i\theta(x)}\psi) - \overline{\psi}e^{-i\theta(x)}e^{i\theta(x)}\psi = \mathcal{L} - \partial_\mu\theta(x)\,\underbrace{\overline{\psi}\gamma^\mu\psi}$$

어디서 많이 본 항
→ 흐름!

국소 게이지 변환에 불변인 디락 라그랑지안

- 디락 라그랑지안에 새로운 항($-q\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\,A_\mu$)을 넣어 보자.
  - $\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\,\overline{\psi}\psi - q\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\,A_\mu$
    - $\psi' = e^{iq\chi(x)}\psi,\ A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\chi(x)$

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = i\left(\overline{\psi}e^{-iq\chi(x)}\right)\gamma^\mu\partial_\mu\left(e^{iq\chi(x)}\psi\right) - m\overline{\psi}e^{-iq\chi(x)}e^{iq\chi(x)}\psi - q\overline{\psi}e^{-iq\chi(x)}\gamma^\mu e^{iq\chi(x)}\psi A'_\mu$$

$$= i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \cancel{q\left(\partial_\mu\chi(x)\right)\overline{\psi}\gamma^\mu\psi} - m\,\overline{\psi}\psi - q\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\,A_\mu + \cancel{q\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\left(\partial_\mu\chi(x)\right)}$$

$$= i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\,\overline{\psi}\psi - q\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\,A_\mu = \mathcal{L}$$

- 디락 라그랑지안이 국소 게이지 변환에 불변
  - ✓ 게이지 이론(Gauge Theory)

- $-q\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\,A_\mu$ 항은 하전흐름($-q\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$)과 벡터장(A_μ)과의 상호작용항이다!

$$\boxed{\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\,\overline{\psi}\psi - q\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\,A_\mu}$$

게이지 공변 미분 (Gauge covariant derivative)

- 최소결합(minimal coupling)
  - 국소 불변인 라그랑지안이 되게 하기 위해서 새로운 미분을 도입
    - $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$

$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\chi(x)$

✓ $D'_\mu\psi' = (\partial_\mu + iqA'_\mu)e^{iq\chi(x)}\psi = iq\left(\partial_\mu\chi(x)\right)e^{iq\chi(x)}\psi + e^{iq\chi(x)}\partial_\mu\psi + iqA'_\mu e^{iq\chi(x)}\psi$

$$= \cancel{iq\left(\partial_\mu\chi(x)\right)e^{iq\chi(x)}\psi} + e^{iq\chi(x)}\partial_\mu\psi + iqA_\mu e^{iq\chi(x)}\psi - \cancel{iq\partial_\mu\chi(x)e^{iq\chi(x)}\psi}$$

$$= e^{iq\chi(x)}\partial_\mu\psi + iqA_\mu e^{iq\chi(x)}\psi = e^{iq\chi(x)}(\partial_\mu + iqA_\mu)\psi = e^{iq\chi(x)}(D_\mu\psi)$$

- 게이지 공변 미분으로 표현한 디락방정식
  - $\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\,\overline{\psi}\psi - q\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\,A_\mu = i\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + iq\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\,A_\mu\right) - m\,\overline{\psi}\psi$

$$= i\,\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu)\psi - m\,\overline{\psi}\psi = i\,\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\,\overline{\psi}\psi$$

$$\boxed{\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\,\overline{\psi}\psi}$$

디락 라그랑지안

- **벡터장을 도입했으므로 Proca 라그랑지안을 고려해보자.**
  - $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A^{\nu} A_{\nu}$ $\quad (F^{\mu\nu} \equiv \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu})$
    - 게이지 변환 $A'_{\mu} = A_{\mu} - \partial_{\mu}\chi(x)$ 에 대해 $F^{\mu\nu}$는 불변, $A^{\nu}A_{\nu}$는 불변이 아님
      - ✓ 증명은 숙제
    - 게이지보존의 질량이 0인 경우 $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$

- **벡터장의 에너지를 포함한 디락 라그랑지안**

$$\boxed{\mathcal{L} = \underbrace{i\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\,\overline{\psi}\psi}_{\text{디락장의 라그랑지안}} - \underbrace{q\,\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi\, A_{\mu}}_{\text{디락장과 벡터장의 상호작용}} - \underbrace{\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}_{\text{벡터장의 셀프에너지}}}$$

U(1) 게이지 이론의 확장

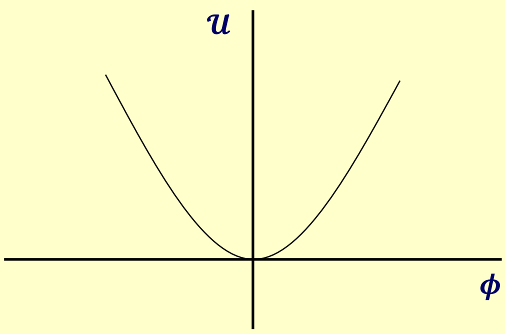
	U(1)	SU(2)	SU(3)
스피너	ψ	$\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$	$\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}$
대칭성	$U(1)\colon\ U^{\dagger}U = 1$	$SU(2):\ U^{\dagger}U = 1, det(U) = 1$	$SU(3):\ U^{\dagger}U = 1, det(U) = 1$
위상 변화	$U = e^{i\theta(x)}$	$U = e^{i\theta(x)}$	$U = e^{i\theta(x)}$
게이지변환 함수	$\theta(x) = q\chi(x)$ (q= 전하)	$\theta(x) = g\,\vec{\tau}\cdot\vec{\chi}(x)$ ($\vec{\tau}$ = 파울리 행렬)	$\theta(x) = g\,\lambda_a\chi^a(x)$ (λ_a= 겔만 행렬)
페르미온 장 변환	$\psi' = e^{iq\chi(x)}\psi$	$\psi' = e^{i\,q\,\vec{\tau}\cdot\vec{\chi}(x)}\psi$	$\psi' = e^{i\,g\,\lambda_a\chi^a(x)}\psi$
공변 미분	$D_{\mu} = \partial_{\mu} + iqA_{\mu}$	$D_{\mu} = \partial_{\mu} + iq\,\vec{\tau}\cdot\vec{W}_{\mu}$	$D_{\mu} = \partial_{\mu} + ig\lambda_a G^a_{\mu}$
게이지 장 변환	$A'_{\mu} = A_{\mu} - \partial_{\mu}\chi(x)$	$\vec{W}'_{\mu} = \vec{W}_{\mu} - \partial_{\mu}\vec{\chi} - 2g(\vec{\chi}\times\vec{W}_{\mu})$	$G'^a_{\mu} = G^a_{\mu} - \partial_{\mu}\chi^a - gf_{abc}\chi^b G^c_{\mu}$
게이지 장 텐서	$F^{\mu\nu} \equiv \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}$	$\vec{F}^{\mu\nu} \equiv \partial^{\mu}\vec{W}^{\nu} - \partial^{\nu}\vec{W}^{\mu} - 2g(\vec{W}^{\mu}\times\vec{W}^{\nu})$	$F^a_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}G^a_{\nu} - \partial_{\nu}G^a_{\mu} - gf_{abc}G^b_{\mu}G^c_{\nu}$
$\mathcal{L}_{DiracField}$	$i\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\,\overline{\psi}\psi$	$i\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\,\overline{\psi}\psi$	$i\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\,\overline{\psi}\psi$
$\mathcal{L}_{interaction}$	$-q\,\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi\,A_{\mu}$	$-g(\,\overline{\psi}\gamma^{\mu}\vec{\tau}\psi\,)\cdot\vec{W}_{\mu}$	$-g(\,\overline{\psi}\gamma^{\mu}\vec{\lambda}\psi\,)\cdot\vec{G}_{\mu}$
$\mathcal{L}_{selfEnergy}$	$-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$	$-\frac{1}{4}\vec{F}^{\mu\nu}\cdot\vec{F}_{\mu\nu}$	$-\frac{1}{4}\vec{F}^{\mu\nu}\cdot\vec{F}_{\mu\nu}$
하전 흐름	$j^{\mu} = q\,\overline{\psi}\gamma^{\mu}Q\psi$	$\vec{j}^{\mu} = q\,\overline{\psi}\gamma^{\mu}\vec{\tau}\psi$	$j^{\mu}_a = q\,\overline{\psi}\gamma^{\mu}\lambda_a\psi$

자발적 대칭성 깨짐과 질량

45

게이지 이론에 수정이 필요한 이유

- QED와 QCD
  - U(1)과 SU(3)로 사실상 같은 구조의 게이지 이론
    - 게이지 벡터장의 질량이 0이다
- Weak interaction
  - SU(2)로 같은 꼴의 게이지 이론이므로 게이지 보존의 질량이 0
    - 약한 상호작용을 기술하기 위해서는 게이지 장이 무거운 질량을 가져야 한다.
    - 어떻게?
- 스칼라 장에서 힌트를 얻어보자.
  - 클라인-고든 라그랑지안
    - $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 = \mathcal{T} - \mathcal{U}$
    - $\mathcal{T} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)$
    - $\mathcal{U} = \frac{1}{2}m^2\phi^2$
      - ✓ 질량 m을 갖는 스칼라 장

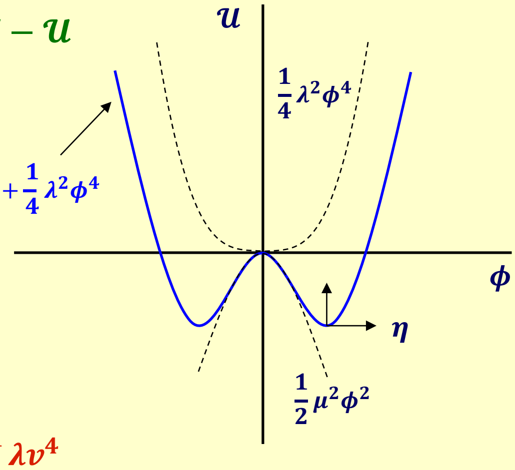


46

고차항 포텐셜

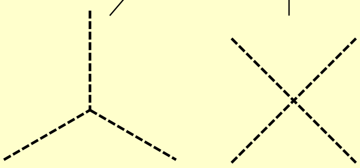
- **고차항을 갖는 포텐셜 항을 도입해보자.**
  - $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) + \left(\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4\right) = \mathcal{T} - \mathcal{U}$
    - $\mathcal{T} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)$
    - $\mathcal{U} = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$
      - ✓ 순전히 임의로 잡은 포텐셜
      - ✓ $\phi = \pm\sqrt{-\mu^2/\lambda}$ 일 때 $\mathcal{U}$가 최저

        $(v \equiv \sqrt{-\mu^2/\lambda})$



  - $\eta \equiv \phi - v$ 으로 라그랑지안을 쓰면
    - $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \lambda v^2\eta^2 - \lambda v\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda\eta^4 + \frac{1}{4}\lambda v^4$

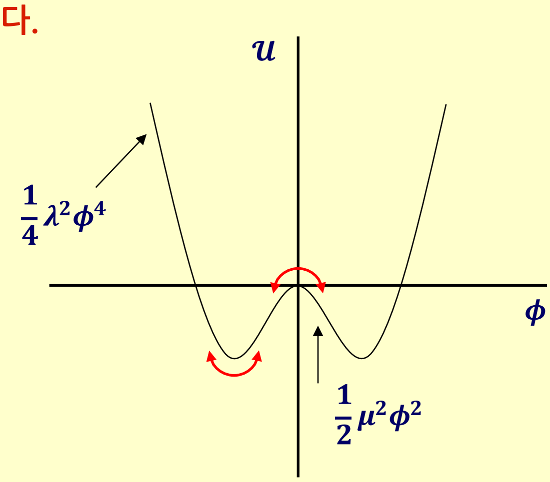
질량 $\mathrm{m} = \sqrt{2\lambda v^2}$



상수

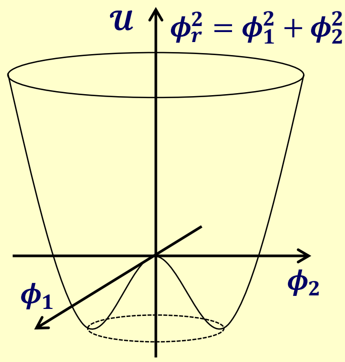
무엇이 달라졌는가?

- **두 개의 라그랑지안은 완벽하게 같은 시스템이다! (같은 물리)**
  - $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) + \left(\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4\right)$
    - 작은 ϕ에 대해 전개하면 안정된 값을 갖지 못한다.
  - $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \lambda v^2\eta^2 - \lambda v\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda\eta^4 + \frac{1}{4}\lambda v^4$
    - 작은 η에 대해 전개하면 안정한 값을 갖는다.



두 개의 스칼라 장 시스템

Griffiths 10.8



- **두 개의 스칼라 장을 고려하자**
  - $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)(\partial^\mu \phi_2) - \mathcal{U}(\phi_1, \phi_2)$
    - $\mathcal{U}(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{1}{4}\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$
  - $\phi_1^2 + \phi_2^2 = v^2 = -\mu^2/\lambda$ 일 때 최저
    - 최저점 $\phi_1 = v,\ \phi_2 = 0$ 를 선택
      - ✓ $\eta \equiv \phi_1 - v,\quad \xi \equiv \phi_2$ 로 치환

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi) + \frac{1}{2}\lambda v^2\left((\eta+v)^2 + \xi^2\right) - \frac{1}{4}\lambda\left((\eta+v)^2 + \xi^2\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi) + \frac{1}{2}\lambda v^2\eta^2 + \cancel{\lambda v^3 \eta} + \boxed{\frac{1}{2}\lambda v^4} + \cancel{\frac{1}{2}\lambda v^2 \xi^2}$$

$$-\frac{1}{4}\lambda\eta^4 - \lambda v\eta^3 - \frac{3}{2}\lambda v^2\eta^2 - \cancel{\lambda v^3\eta} - \boxed{\frac{1}{4}\lambda v^4} - \frac{1}{2}\lambda\eta^2\xi^2 - \lambda v\eta\xi^2 - \cancel{\frac{1}{2}\lambda v^2\xi^2} - \frac{1}{4}\lambda\xi^4$$

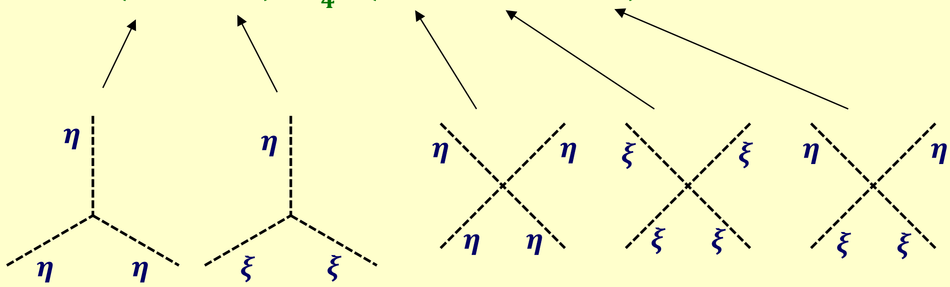
$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi) - \lambda v^2\eta^2 - \lambda v(\eta^3 + \eta\xi^2) - \frac{1}{4}\lambda(\eta^4 + \xi^4 + 2\eta^2\xi^2) + \frac{1}{4}\lambda v^4$$

두 개의 스칼라 장 시스템의 해석

- **두 개의 스칼라 장이 만드는 라그랑지안**
  - $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \lambda v^2 \eta^2$ 질량 $m_\eta = \sqrt{2}\mu$의 스칼라 입자

$+\frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi)$ 질량 없는, $m_\xi = 0$ 스칼라 입자

$-\lambda v(\eta^3 + \eta\xi^2) - \frac{1}{4}\lambda(\eta^4 + \xi^4 + 2\eta^2\xi^2)$ 5개의 상호작용항



$+\frac{1}{4}\lambda v^4$ 상수 → 의미없음

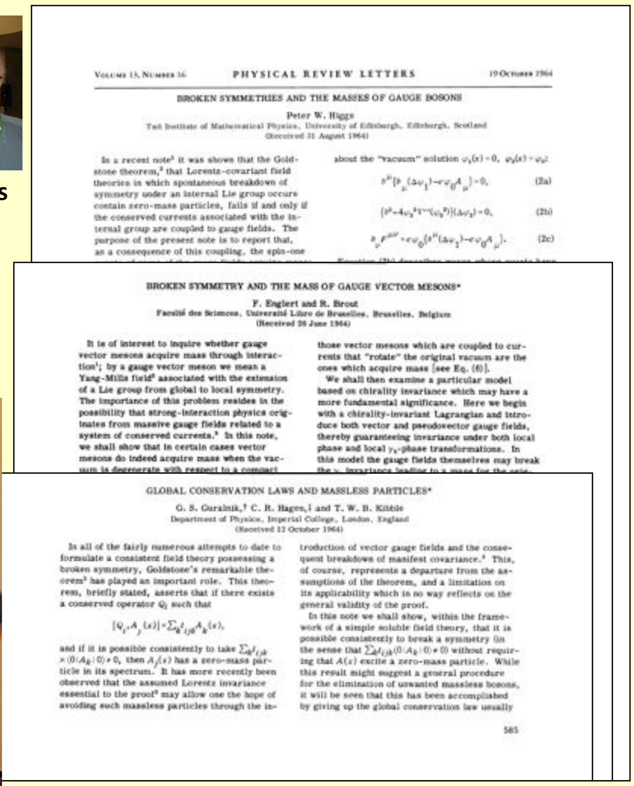
Goldstone theorem:
대칭성의 자발적 붕괴와 함께
질량이 0인 스칼라 입자가 나온다

힉스 메커니즘

1964 - 3 PRL papers

- Higgs
  - PL12, 132 (Sep.15)
  - PRL13, 508 (Oct. 19)
- Englert & Brout
  - PRL13, 321 (Aug. 31)
- Guralnik, Hagen, Kibble
  - PRL13, 585 (Nov.16)

Higgs



VOLUME 13, NUMBER 16 PHYSICAL REVIEW LETTERS 19 OCTOBER 1964

BROKEN SYMMETRIES AND THE MASSES OF GAUGE BOSONS

Peter W. Higgs
Tait Institute of Mathematical Physics, University of Edinburgh, Edinburgh, Scotland
(Received 31 August 1964)

In a recent note[1] it was shown that the Goldstone theorem,[2] that Lorentz-covariant field theories in which spontaneous breakdown of symmetry under an internal Lie group occurs contain zero-mass particles, fails if and only if the conserved currents associated with the internal group are coupled to gauge fields. The purpose of the present note is to report that, as a consequence of this coupling, the spin-one

about the "vacuum" solution $\varphi_1(x)=0$, $\varphi_2(x)=\varphi_0$:

$$\partial^\mu\{\partial_\mu(\Delta\varphi_1)-e\varphi_0A_\mu\}=0, \quad (2a)$$

$$\{\partial^2-4\varphi_0^2V''(\varphi_0^2)\}(\Delta\varphi_2)=0, \quad (2b)$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}=e\varphi_0\{\partial^\mu(\Delta\varphi_1)-e\varphi_0A_\mu\}. \quad (2c)$$

BROKEN SYMMETRY AND THE MASS OF GAUGE VECTOR MESONS*

F. Englert and R. Brout
Faculté des Sciences, Université Libre de Bruxelles, Bruxelles, Belgium
(Received 26 June 1964)

It is of interest to inquire whether gauge vector mesons acquire mass through interaction[1]; by a gauge vector meson we mean a Yang-Mills field[2] associated with the extension of a Lie group from global to local symmetry. The importance of this problem resides in the possibility that strong-interaction physics originates from massive gauge fields related to a system of conserved currents.[3] In this note, we shall show that in certain cases vector mesons do indeed acquire mass when the vac-

those vector mesons which are coupled to currents that "rotate" the original vacuum are the ones which acquire mass [see Eq. (6)].

We shall then examine a particular model based on chirality invariance which may have a more fundamental significance. Here we begin with a chirality-invariant Lagrangian and introduce both vector and pseudovector gauge fields, thereby guaranteeing invariance under both local phase and local γ_5-phase transformations. In this model the gauge fields themselves may break

GLOBAL CONSERVATION LAWS AND MASSLESS PARTICLES*

G. S. Guralnik,† C. R. Hagen,‡ and T. W. B. Kibble
Department of Physics, Imperial College, London, England
(Received 12 October 1964)

In all of the fairly numerous attempts to date to formulate a consistent field theory possessing a broken symmetry, Goldstone's remarkable theorem[1] has played an important role. This theorem, briefly stated, asserts that if there exists a conserved operator Q_i such that

$$[Q_i, A_j(x)] = \sum_k t_{ijk} A_k(x),$$

and if it is possible consistently to take $\sum_k t_{ijk} \langle 0|A_k|0\rangle \neq 0$, then $A_j(x)$ has a zero-mass particle in its spectrum. It has more recently been observed that the assumed Lorentz invariance essential to the proof[2] may allow one the hope of avoiding such massless particles through the in-

troduction of vector gauge fields and the consequent breakdown of manifest covariance.[3] This, of course, represents a departure from the assumptions of the theorem, and a limitation on its applicability which in no way reflects on the general validity of the proof.

In this note we shall show, within the framework of a simple soluble field theory, that it is possible consistently to break a symmetry (in the sense that $\sum_k t_{ijk}\langle 0|A_k|0\rangle \neq 0$) without requiring that $A(x)$ excite a zero-mass particle. While this result might suggest a general procedure for the elimination of unwanted massless bosons, it will be seen that this has been accomplished by giving up the global conservation law usually

585

복소 스칼라 장

- **두 개의 스칼라 장을 한 개의 복소 스칼라 장으로 묶어 써보자**
  - $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\,\phi_2)$
    - $\phi^*\phi = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2)$

$\partial^\mu\phi\,\partial_\mu\phi \equiv (\partial_\mu\phi)^2$

  - $\mathcal{L} = (\partial^\mu\phi)^*(\partial_\mu\phi) - \mu^2(\phi^*\phi) - \lambda(\phi^*\phi)^2$

$$= \frac{1}{2}\partial^\mu(\phi_1 - i\,\phi_2)\partial_\mu(\phi_1 + i\,\phi_2) - \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4}\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 - i\frac{1}{2}\partial^\mu\cancel{\phi_2}\partial_\mu\phi_1 + i\frac{1}{2}\partial^\mu\cancel{\phi_1}\partial_\mu\phi_2$$

$$-\frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4}\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 - \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4}\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$$

    - 두 개의 스칼라 장 문제와 동일!

로컬 U(1) 대칭 복소 스칼라 장의

- **복소 스칼라 장에 로컬 U(1) 게이지 대칭성을 요구**
  - $\phi \to \phi' = e^{i\theta(x)}\phi$
    - $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$
  - $\mathcal{L} = (\partial^\mu - iqA^\mu)\phi^*(\partial_\mu + iqA_\mu)\phi \boxed{- \mu^2(\phi^*\phi) - \lambda(\phi^*\phi)^2}$
    - $-\mu^2(\phi^*\phi) - \lambda(\phi^*\phi)^2$ 은 복소 스칼라 장의 경우와 완전히 똑같음
    - $(\partial^\mu - iqA^\mu)\phi^*(\partial_\mu + iqA_\mu)\phi$ 항을 전개해보자

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu - iqA^\mu)\phi^*(\partial_\mu + iqA_\mu)\phi$$

$$= (\partial^\mu\phi^* - iqA^\mu\phi^*)(\partial_\mu\phi + iqA_\mu\phi)$$

$$= \partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi + iqA_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - iqA^\mu\phi^*\partial_\mu\phi + q^2A^\mu A_\mu\phi^*\phi$$

$A_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - A^\mu\phi_1\partial_\mu\phi_1 = 0$

$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 + \frac{1}{2}iqA_\mu(\phi_1 + i\,\phi_2)\partial^\mu(\phi_1 - i\,\phi_2)$$

$$-\frac{1}{2}iqA^\mu(\phi_1 - i\,\phi_2)\partial_\mu(\phi_1 + i\,\phi_2) + q^2A^\mu A_\mu\frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2} + \underbrace{qA^\mu(\phi_1\partial_\mu\phi_2 - \phi_2\partial_\mu\phi_1) + \frac{1}{2}q^2A^\mu A_\mu(\phi_1^2 + \phi_2^2)}_{\text{새로운 항!}}$$

대칭성 깨짐

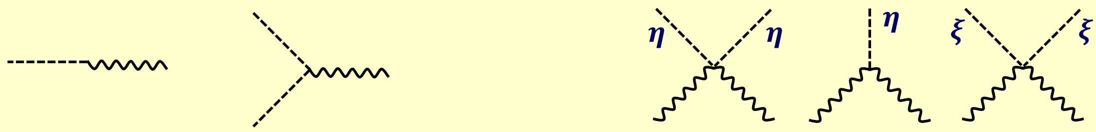
- 복소 스칼라장의 문제와 동일
  - 최저점 $\phi_1 = v,\ \phi_2 = 0$ 를 선택
    - ✓ $\eta \equiv \phi_1 - v,\quad \xi \equiv \phi_2$ 로 치환 → $\phi_1 = \eta + v,\ \phi_2 = \xi$
  - $\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi_1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi_2\right)^2 - \mu^2(\phi^*\phi) - \lambda(\phi^*\phi)^2$ → 복소 스칼라의 경우와 동일
  - $qA^\mu\left(\phi_1\partial_\mu\phi_2 - \phi_2\partial_\mu\phi_1\right) + \frac{1}{2}q^2A^\mu A_\mu\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)$ → 새로운 항

$$qA^\mu(\phi_1\partial_\mu\phi_2 - \phi_2\partial_\mu\phi_1) + \frac{1}{2}q^2A^\mu A_\mu(\phi_1^2 + \phi_2^2)$$

$$= qA^\mu\left(\ (\eta+v)\partial_\mu\xi - \xi\partial_\mu(\eta+v)\ \right) + \frac{1}{2}q^2A^\mu A_\mu\left((\eta+v)^2 + \xi^2\right)$$

$$= qA^\mu(\eta\partial_\mu\xi + v\partial_\mu\xi - \xi\partial_\mu\eta) + \frac{1}{2}q^2A^\mu A_\mu(\eta^2 + 2\eta v + v^2 + \xi^2)$$

$$= qv(\partial_\mu\xi)A^\mu + q\big(\eta(\partial_\mu\xi) - \xi(\partial_\mu\eta)\big)A^\mu + \frac{1}{2}q^2v^2A^\mu A_\mu + \frac{1}{2}q^2(\eta^2 + 2\eta v + \xi^2)A^\mu A_\mu$$



대칭성이 깨진 후의 라그랑지안

- 복소 스칼라 장이 만드는 라그랑지안

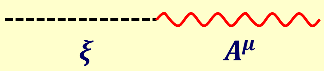
$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta) - \lambda v^2\eta^2$ 질량 $m_\eta = \sqrt{2}\mu$의 스칼라 입자

$+\frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)(\partial^\mu\xi)$ 질량 없는, $m_\xi = 0$ 스칼라 입자

$+\frac{1}{2}q^2v^2A_\mu A^\mu$ $m_A = qv$ 인 벡터 보존

$+q^2v\eta A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}q^2\left(\eta^2 + \xi^2\right)A_\mu A^\mu$ 벡터장과 스칼라 장의 상호작용항

$+q\left(\eta(\partial_\mu\xi) - \xi(\partial_\mu\eta)\right)A^\mu + qv(\partial_\mu\xi)A^\mu$



$-\lambda v\left(\eta^3 + \eta\xi^2\right) - \frac{1}{4}\lambda\left(\eta^4 + \xi^4 + 2\eta^2\xi^2\right)$ 5개의 상호작용항

$+\frac{1}{4}\lambda v^4$ 상수 → 의미없음

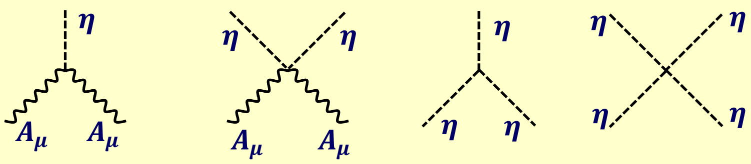
복소 스칼라 장 시스템의 해석

- **$\xi = 0$ 인 게이지를 택하면**
  - $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \lambda v^2 \eta^2$ 　　질량 $m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2}$의 스칼라 입자

    $+\frac{1}{2} q^2 v^2 A_\mu A^\mu$ 　　$m_A = qv$ 인 벡터 보존

    $+q^2 v\eta\, A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} q^2 \eta^2 A_\mu A^\mu - \lambda v \eta^3 - \frac{1}{4}\lambda \eta^4$ 　　4개의 η, A^μ 상호작용항

    $+\frac{1}{4}\lambda v^4$ 　　상수 → 의미없음



SU(2) 게이지 대칭성의 SSB

- $\mathcal{L} = \left|\left(i\partial_\mu - g\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot \vec{W}_\mu\right)\phi\right|^2 - V(\phi)$
  - $V(\phi) = \mu^2(\phi^\dagger\phi) + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$
  - $\phi = \begin{pmatrix}\phi_\alpha \\ \phi_\beta\end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\phi_1 + i\,\phi_2 \\ \phi_3 + i\,\phi_4\end{pmatrix}$
- **$\mu^2 < 0$ 이고 $\lambda > 0$ 인 경우**
  - $\phi^\dagger\phi = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) = -\frac{\mu^2}{\lambda}$ 일때 최저
    - $\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0$ 이고, $\phi_3^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v^2$인 곳을 택함
      - ✓ 진공 $\phi_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0 \\ v\end{pmatrix}$
    - $\phi(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0 \\ v + h(x)\end{pmatrix}$
      - ✓ 4개의 성분 대신 1개의 힉스장만 남음 (SSB)

SU(2) 게이지 대칭성의 SSB의 결과

- SU(2) 대칭성의 SSB를 통해 4개의 장이 남음
  - $\theta_1, \theta_2, \theta_3, h$

- $\phi(x) = e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}/2}\begin{pmatrix} 0 \\ (v+h(x))/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\left|g\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\overrightarrow{W}_\mu\phi\right|^2 = \frac{g^2}{8}\left|\begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}\right|^2$$

$$= \frac{g^2v^2}{8}\left[(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2 + (W_\mu^3)^2\right]$$

- $\frac{g^2v^2}{8} = \frac{1}{2}M^2 \rightarrow \mathrm{m} = \frac{1}{2}gv$

GWS의 전약 이론

SU(2)xU(1) 게이지 대칭성의 SSB

- $\mathcal{L}_{EW} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_h$
  - $\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4}\vec{W}^{\mu\nu}\cdot\vec{W}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}$
  - $\mathcal{L}_f = \overline{\chi}_L\gamma^\mu\left[i\partial_\mu - g\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{W}_\mu - g'\frac{Y}{2}B_\mu\right]\chi_L + \overline{e}_R\gamma^\mu\left[i\partial_\mu - g'\frac{Y}{2}\cdot B_\mu\right]e_R$
  - $\mathcal{L}_h = \left|\left(i\partial_\mu - g\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{W}_\mu - g'\frac{Y}{2}B_\mu\right)\phi\right|^2 - V(\phi)$
    - $V(\phi) = \mu^2(\phi^\dagger\phi) + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$
      - ✓ $\phi = \begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^0\end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\phi_1 + i\,\phi_2\\ \phi_3 + i\,\phi_4\end{pmatrix}$, $(Y(\phi) = 1)$
- SSB
  - $\mu^2 < 0$ 이고 $\lambda > 0$ 인 경우
    - $\phi^\dagger\phi = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) = -\frac{\mu^2}{\lambda}$ 일 때 최저
      - ✓ $\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0$ 이고, $\phi_3^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v^2$인 곳을 택함
      - ✓ 진공 $\phi_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix}$
    - $\phi(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0\\ v + h(x)\end{pmatrix}$
      - ✓ 1개의 힉스장만 남음

SU(2)xU(1) 게이지 보존의 질량

- 게이지 보존의 질량은 라그랑지안에 VEV ϕ_0 값을 대입하여 얻음

$$\left|\left(g\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{W}_\mu + g'\frac{Y}{2}\cdot B_\mu\right)\phi\right|^2 = \frac{1}{8}\left|\begin{pmatrix} gW_\mu^3 + g'B_\mu & g(W_\mu^1 - iW_\mu^2)\\ g(W_\mu^1 + iW_\mu^2) & -gW_\mu^3 + g'B_\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix}\right|^2$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} gv(W_\mu^1 + iW_\mu^2) & v(g'B_\mu - gW_\mu^3)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} gv(W_\mu^1 - iW_\mu^2)\\ v(g'B_\mu - gW_\mu^3)\end{pmatrix}$$

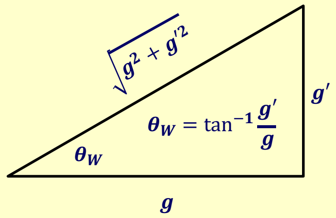
$$= \frac{1}{8}g^2v^2\left[(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2\right] + \frac{1}{8}v^2\left[(gW_\mu^3)^2 + (g'B_\mu)^2 - 2gg'W_\mu^3B_\mu\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}gv\right)^2 W_\mu^+W_-^\mu + \frac{1}{8}v^2\begin{pmatrix}W_\mu^3 & B_\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g^2 & -gg'\\ -gg' & g'^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}W_\mu^3\\ B_\mu\end{pmatrix}$$

- $W_\mu^\pm$ 의 질량은 $\frac{1}{2}gv$!

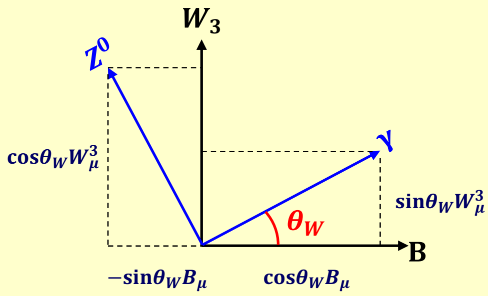
SU(2)xU(1) 게이지 보존의 질량

- Z^0 의 질량은?
  - $\frac{1}{8}v^2\left(gW_\mu^3 - g'B_\mu\right)^2$
- $gW_\mu^3 - g'B_\mu$가 Z^0를 의미하면, 직교하는 $gW_\mu^3 - g'B_\mu$는 A_μ ?
  - $0\times\left(gW_\mu^3 + g'B_\mu\right)^2$
    - 질량은 영!
- $Z_\mu^0 = \frac{gW_\mu^3 - g'B_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}}$, $A_\mu = \frac{gW_\mu^3 + g'B_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}}$



$$\boxed{\sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}}$$

$$\boxed{\cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}}$$



- Z^0 의 질량은?
  - $\frac{1}{8}v^2\left(gW_\mu^3 - g'B_\mu\right)^2$

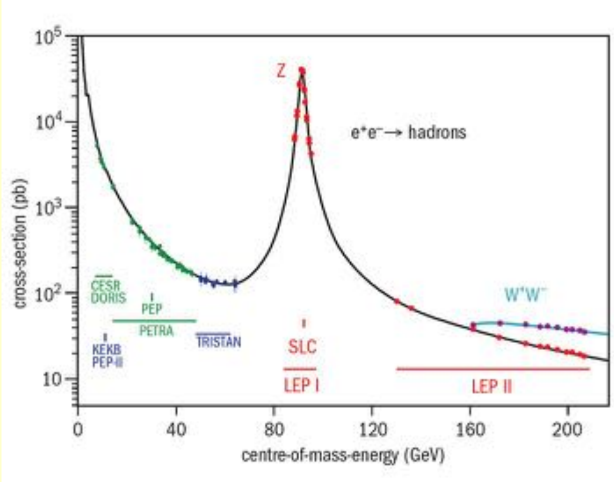
  $= \frac{1}{8}v^2\left(\sqrt{g^2+g'^2}\,Z_\mu^0\right)^2 = \frac{1}{8}v^2\left(g^2+g'^2\right)\left(Z_\mu^0\right)^2 = \frac{1}{2}(M_Z)^2\left(Z_\mu^0\right)^2$

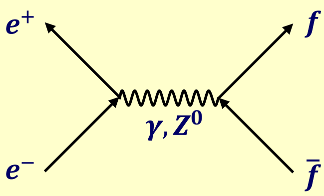
    - $M_Z = \frac{1}{2}v\sqrt{g^2+g'^2}$

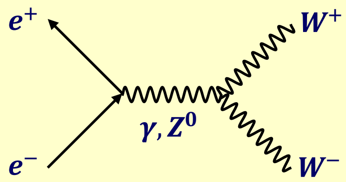
- $M_W = \frac{1}{2}gv$, $M_Z = \frac{1}{2}v\sqrt{g^2+g'^2}$

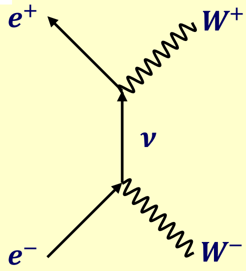
$$\boxed{\frac{M_W}{M_Z} = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}} = \cos\theta_W}$$

Z^0와 W^+W^-쌍의 생성









EW 최종 라그랑지안

- $W^\pm, Z^0$ 가 질량을 갖고 γ 은 질량이 없는 게이지를 택하면

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\vec{W}^{\mu\nu}\cdot\vec{W}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}$$

$W^\pm, Z^0, \gamma$ 의 운동에너지, self interaction

$$+ \ \bar{L}\gamma^\mu\left(i\partial_\mu - \frac{1}{2}g\vec{\tau}\cdot\vec{W}_\mu - g'\frac{Y}{2}B_\mu\right)L$$

$$+ \ \bar{R}\gamma^\mu\left(i\partial_\mu - g'\frac{Y}{2}B_\mu\right)R$$

페르미온들의 운동에너지와
$W^\pm, Z^0, \gamma$ 와의 상호작용

$$+ \ \left|\left(i\partial_\mu - \frac{1}{2}g\vec{\tau}\cdot\vec{W}_\mu - g'\frac{Y}{2}B_\mu\right)\phi\right|^2 - V(\phi)$$

$W^\pm, Z^0, \gamma$ 와 Higgs의 결합 및 질량

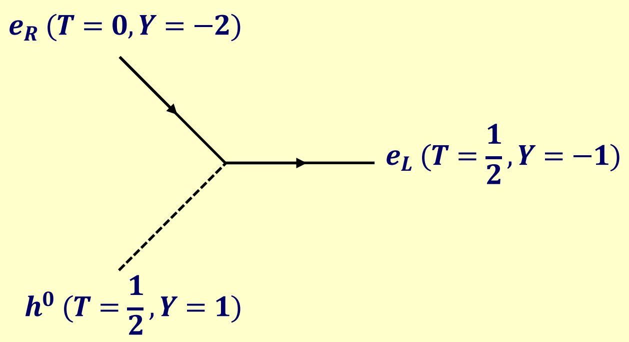
$$+ \ \mathcal{L}_{Yukawa}$$

페르미온들의 질량

페르미온의 질량

페르미온들의 질량

- **힉스: 아이소스핀 ½, 약 초전하 1**
  - 오른손지기와 왼손지기 사이의 상호작용



Backup slide

예제

스핀 0 스칼라장의 클라인-고든 라그랑지안이

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

일 때 오일러-라그랑쥬 방정식을 써라.

풀이

오일러-라그랑쥬 방정식은

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}$$

좌변 괄호안은 $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial^\mu\phi$ 이고, 우변은 $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi$ 이므로,

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + (\tfrac{mc}{\hbar})^2\phi=0$$

으로 클라인-고든 방정식을 얻는다.

예제

스핀 $\frac{1}{2}$ 인 스피너 장의 디랙 라그랑지안이

$$\mathcal{L} = i\,\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

일 때 오일러-라그랑쥬 방정식을 써라.

풀이

ψ에 대한 오일러-라그랑쥬 방정식은 $\partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}$ 이고,

$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)} = i\,\bar{\psi}\gamma^{\mu}$이고, $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = -m\bar{\psi}$이므로, $i\,\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu} + m\bar{\psi} = 0$ 을 얻는다. (수반 디랙방정식)

$\bar{\psi}$에 대한 오일러-라그랑쥬 방정식은 $\partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\bar{\psi})}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}}$ 이고,

$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\bar{\psi})} = 0$ 이고, $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = i\,\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\psi$이므로, $i\,\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\psi = 0$ 을 얻는다. (디랙방정식)

예제

스핀 1인 벡터장의 프로카(Proca) 라그랑지안이

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu})(\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}) + \frac{1}{2}m^2A^{\nu}A_{\nu}$$

일 때 오일러-라그랑쥬 방정식을 써라.

풀이

오일러-라그랑쥬 방정식은 $\partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\nu}}$ 이고,

$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})} = -(\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu})$이고, (이 증명이 연습문제 10.2)

$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\nu}} = m^2A^{\nu}$ 이므로,

$\partial_{\mu}(\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}) + m^2A^{\nu} = 0$ (프로카 방정식)을 얻는다.

(% 프로카 방정식에서 m=0인 경우는 $\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = 0$ 로 막스웰방정식이 됨)

예제

전류 소스항 J^μ를 갖는 질량이 0인 맥스웰 라그랑지안이

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu$$

일 때 오일러-라그랑쥬 방정식을 써라.

풀이

오일러-라그랑쥬 방정식은 $\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu}$ 이고,

$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$이고, 따라서 좌변은 $-\partial_\mu F^{\mu\nu}$, 이고 $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -J^\mu$ 이므로,

$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\mu$ 를 얻는다.

양-밀즈 게이지 이론

- **Chen Nung Yang과 Robert Mills (1954)**
  - 강력을 설명할 수 있는 nonabelian 군을 사용한 게이지이론을 만듦
    - QED의 확장판
  - Jeffrey Goldstone, Yoichiro Nambu 등이 대칭성깨짐을 통해 질량을 부여하는 방법을 찾아내면서 약력과 강력을 설명하는 게이지 이론으로 자리 잡음
    - SU(2)xU(1) : 약력
    - SU(3) : 강력


PHYSICAL REVIEW VOLUME 96, NUMBER 1 OCTOBER 1, 1954

Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*

C. N. YANG† AND R. L. MILLS

Brookhaven National Laboratory, Upton, New York

(Received June 28, 1954)

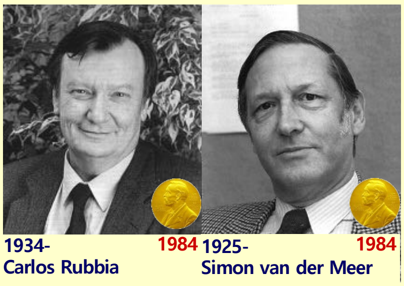
INTRODUCTION


C.N. Yang
(1922-)


R. L. Mills
(1927-1999)

Weak보존 W±, Z⁰ 의 발견

- 약력을 매개하는 보존의 발견을 위해 유럽과 미국은 선의의 경쟁을 시작한다.
- CERN의 까를로스 루비아와 미국의 데이빗 클라인, 피터 맥킨타이어는 양성자와 반양성자를 충돌시킬 아이디어를 제안.
  - 미국의 Fermi연구소와 유럽의 CERN이 이 제안대로 양성자-반양성자 충돌실험을 계획.
- 초전도자석을 사용해 1TeV에 도달하려고 Tevatron이 노력하는 사이 CERN의 SPS ($\sqrt{s}$ = 540 GeV) 는 1983년 Weak boson들을 먼저 찾아내는 데 성공한다. (UA1 & UA2)



"for their decisive contributions to the large project, which led to the discovery of the field particles W and Z, communicators of weak interaction"

카비보 행렬과 CKM 행렬

- 1963 Cabibbo
  - CC 커플링을 하는 쿼크는 d, s 가 아니고, d', s'

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} \\ V_{cd} & V_{cd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_C & \sin\theta_C \\ -\sin\theta_C & \cos\theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

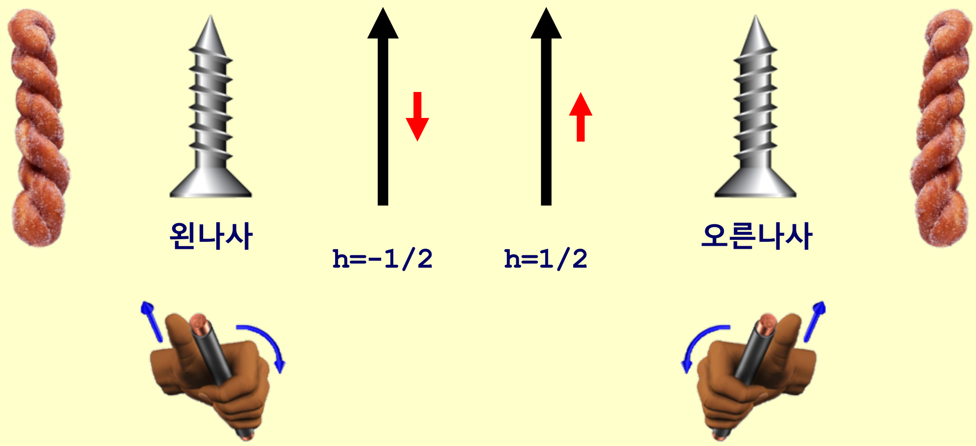
- 1973년 Kobaiashi, Maskawa 가 일반화
  - 1974년 c쿼크가 발견되기 이전
  - 1975년 3세대 경입자, τ가 발견되기 이전

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

꽈배기형 (Helicity)

- 입자의 운동방향을 향하는 스핀의 크기

$$\boxed{h = \frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \hat{p}}$$



손지기형 (Chirality)

- 디락방정식 해의 γ^5의 고유값

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi$$

$$\psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi$$

스피너의 손지기(Chiral) 표현

▪ 왼손지기 스피너와 오른손지기 스피너

- 왼손지기 입자: $u_L = \frac{(1-\gamma^5)}{2} u$ adjoint spinor $\bar{u}_L = \bar{u}\frac{(1+\gamma^5)}{2}$
- 오른손지기 입자: $u_R = \frac{(1+\gamma^5)}{2} u$ adjoint spinor $\bar{u}_R = \bar{u}\frac{(1-\gamma^5)}{2}$
- 왼손지기 반입자: $v_L = \frac{(1+\gamma^5)}{2} v$ adjoint spinor $\bar{v}_L = \bar{v}\frac{(1-\gamma^5)}{2}$
- 오른손지기 반입자: $v_R = \frac{(1-\gamma^5)}{2} v$ adjoint spinor $\bar{v}_L = \bar{v}\frac{(1+\gamma^5)}{2}$

▪ 스피너의 손지기 분리

- 입자: $u = \frac{(1-\gamma^5)}{2} u + \frac{(1+\gamma^5)}{2} u = u_L + u_R$
- 반입자: $v = \frac{(1+\gamma^5)}{2} v + \frac{(1-\gamma^5)}{2} v = v_L + v_R$

$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$

$\gamma^\mu\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^\mu$

$\left(\frac{(1-\gamma^5)}{2}\right)^2 = \frac{(1-\gamma^5)}{2}$

$\frac{(1-\gamma^5)}{2}\frac{(1+\gamma^5)}{2} = 0$

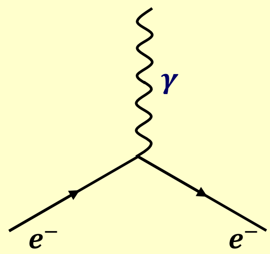
손지기(Chiral) 표현으로 본 전자기력과 약력

▪ 스피너 표현의 단순화

- $u(p_e) \equiv e,\ \bar{u}(p_e) \equiv \bar{e},\ v(p_{e^+}) \equiv e^+,\ \bar{v}(p_{e^+}) \equiv \overline{e^+}$

▪ 전자기력에서의 흐름(Current)

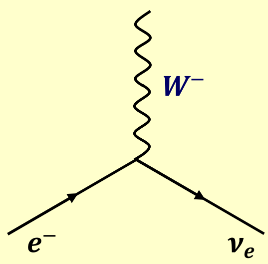
- $j_\mu^{em} = -\bar{e}\gamma_\mu e = -(\bar{e}_L + \bar{e}_R)\gamma_\mu(e_L + e_R)$
  - ◆ $j_\mu^{em} = -\bar{e}_L\gamma_\mu e_L - \bar{e}_R\gamma_\mu e_R$
    - ✓ 왼손, 오른손지기 스피너의 벡터 상호작용



$\boxed{j_\mu^{em} = -\bar{e}\gamma_\mu e}$

▪ 약한 흐름 (Weak current)

- $j_\mu^- = \frac{1}{2}\bar{u}(\nu_e)\gamma_\mu(1-\gamma^5)u(e) = \bar{\nu}\gamma_\mu\frac{(1-\gamma^5)}{2} e$
  - ◆ $j_\mu^- = \bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L$
    - ✓ 왼손지기 스피너만의 벡터 상호작용



$\boxed{j_\mu^- = \bar{\nu}_L\gamma_\mu e_L}$

$j_+^\mu \equiv \bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L$ (Thomson)
$j_\mu^- \equiv \bar{\nu}_L\gamma_\mu e_L$ (Griffiths)