

전자기력과 약력의 통합

"자연의 최종 법칙이 무엇이든간에, 물리학자들이 좋아하는 방식으로 설계 되어 있을 이유는 없다." - 스티븐 와인버그

«Whatever the final laws of nature may be, there is no reason to suppose that they are designed to make physicists happy.» – Steven Weinberg



Steven Weinberg (1933-2021)

1956년 우젠슥(吳健雄, Chien-Shiung Wu)의 실험으로 약한 상호작용에 있어 반전성이 지켜지지 않는다는 것이 확실해지자, 약한상호작용을 제대로 기술하기 위한 다양한 이론적 시도가 생겨났다. 왼손지기 입자와 오른손지기 입자가 약한상호작용에 있어서는 서로 다른 행동을 하므로 이를 기술할 수 있는 이론적 틀이 필요했다. QED의 창시자 중 하나인 슈빙거(Julian Seymour Schwinger, 1918-1994)는 60년대에 SU(2) 대칭성을 사용하여 전자기력과 약력을 통합적으로 기술할 수 있는지를 연구하기 시작했고, 그의 제자였던 셸든 글라쇼(Sheldon Glashow, 1932-)가 마침내 전자기력과 약력을 통합적으로 설명하는 이론을 제안하게 된다. 이후 와인버그와 살람이 힉스 메커니즘을 사용하여 실질적인 힘의 통합을 이루어 내었고, 이후 트루프트에 의해 재규격화가 가능한 이론으로 발전하여 전약이론의 체계가 완성되었다.

- 목 차 -

| | |
|---|----|
| 10.1 약 아이소스핀과 약 초전하 (Weak Isospin and Weak Hypercharge) | 3 |
| 10.2 약 아이소스핀 흐름 (Weak Isospin Current) | 5 |
| 10.2.1 약 하전흐름(Weak charged current) | 5 |
| 10.2.2 약 아이소스핀 표현 | 6 |
| 10.2.3 약 중성 흐름(Weak neutral current) | 7 |
| 10.2.4 약 아이소스핀 $SU(2)_L$ 흐름 | 8 |
| 10.3 약 초전하 흐름 (Weak Hypercharge Current) | 8 |
| 10.4 전자기력과 약력의 통합 가능성 | 9 |
| 10.4.1 와인버그 각(Weinberg angle) | 9 |
| 10.4.2 중성흐름 부분 | 10 |

10.1 약 아이소스핀과 약 초전하 (Weak Isospin and Weak Hypercharge)

양자전기동력학으로 전자를 기술할 때 전하(charge, Q)와 스핀(spin, s)이 나온다. 전하와 스핀은 둘 다 전자를 기술하는 기본 양자수이다. 전자는 스핀이 위(\uparrow)인 상태와 아래(\downarrow)인 상태 두 가지로만 나타난다.

| | 전하 (Q) | 스핀 (s_z) |
|----------------|------------|--------------|
| e_\uparrow | -1 | 1/2 |
| e_\downarrow | -1 | -1/2 |

아이소스핀(isospin)란 용어는 하이젠베르그가 처음으로 사용했다고 알려져 있는데, 이는 중성자가 질량으로 보나 핵력으로 보나 양성자와 매우 비슷해, 두 입자를 같은 입자의 서로 다른 두 상태로 취급할 수 있다는 생각에서 도입된 개념이다. 즉 양성자는 아이소스핀이 위($I_z = \uparrow$)인 상태고 중성자는 아이소스핀이 아래($I_z = \downarrow$)인 상태로 표시하여 두 입자를 하나의 이중항으로 볼 수 있다는 개념이다. 그러면 이 아이소스핀에 대응하여 양성자와 중성자는 초전하(hypercharge) $Y = 1$ 을 갖는 한 입자의 두 가지 상태라고 생각할 수 있다.¹

| | 초전하 (Y) | 아이소스핀 (I_z) |
|-----|-------------|-----------------|
| 양성자 | 1 | 1/2 |
| 중성자 | 1 | -1/2 |

¹ 초전하(hyper-charge)란 용어보다 아이소 전하(iso-charge)란 용어가 더 어울리지 않은지 생각해보자.

한편 양성자는 +1의 전하를, 중성자는 -1의 전하를 가지고 있으므로, 입자의 전하는 $Q = Y/2 + I_z$ 란 관계가 있음을 알 수 있다.

$$Q(p) = Y/2 + I_z = 1/2 + 1/2 = 1$$

$$Q(n) = Y/2 + I_z = 1/2 - 1/2 = 0$$

이 개념을 그대로 약한상호작용에도 이어 받아 사용할 수 있다. 베타붕괴에서 볼 수 있듯이 하전 약상호작용을 통해 전자가 중성미자로 바뀌고, d쿼크가 u쿼크로 바뀌는 현상을 보면, 전자와 중성미자를 약한상호작용에 있어서의 경입자 이중항으로 보고, u쿼크와 d쿼크를 쿼크 이중항으로 볼 수 있다. 즉 하전 약상호작용을 겪는 왼손지기(left chirality) 입자들은 이중항을 이룬다. 따라서 왼손지기 입자들에게만 각각 약 아이소스핀 1/2과 -1/2를 주고, 오른손지기 입자들은 이중항을 구성하지 않아 약 아이소스핀 값을 0으로 놓는다. 이를 정리하여 써 보면,

| L 입자 | Y_w | I_z | Q | R 입자 | Y_w | I_z | Q |
|--|-------|-------|------|--------|-------|-------|------|
| $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$ | -1 | 1/2 | 0 | e_R | -2 | 0 | -1 |
| $\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L$ | 1/3 | 1/2 | 2/3 | u_R | 4/3 | 0 | 2/3 |
| | 1/3 | -1/2 | -1/3 | d'_R | -2/3 | 0 | -1/3 |

참고로 중성미자의 경우 오른손지기 중성미자(ν_{eR})는 없다.²

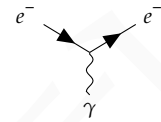
² 오른손지기 중성미자가 없다는 것은 실험적으로 발견된 바가 없기 때문이다. 어쩌면 오른손지기 중성미자가 매우 무거워 실험실에 나타나지 않는 것 뿐일 수도 있다. 오른손지기 중성미자를 찾기 위한 실험은 계속되고 있다.

이렇게 약초전하와 약아이소스핀을 도입하면, 약한상호작용에 의해 전자가 중성미자로 바뀌는 과정이나 d쿼크가 u쿼크로 바뀌는 과정의 경우 약초전하(Y_w)가 변하지 않는 것을 알 수 있다. 즉 약 초전하는 약 상호작용에 있어 보존되는 양이다.

10.2 약 아이소스핀 흐름 (Weak Isospin Current)

10.2.1 약 하전흐름(Weak charged current)

양자전기동력학에서의 상호작용 벡터를 상기해보자. 이는 전자가 움직이면서 전류 $Q\bar{e}\gamma^\mu e$ 를 만들고, 벡터에서 가상광자 A_μ 를 내놓거나 흡수하면서 전자가 꺾여 나가는 것으로 설명할 수 있다. 이 때 전자가 가상광자를 얼마나 잘 내어놓는 지를 나타내는 정도가 결합상수 e 가 된다.



$$\mathcal{L} = Qe(\bar{e}\gamma^\mu e)A_\mu$$

성공적인 게이지장론인 QED와 같은 방식으로 약력을 기술할 수 있을까? 약력을 게이지장론화하기 위해서는 중성미자(ν)가 전자(e)로 변하고, u 쿼크가 d 쿼크로 변하는 과정을 약전류의 흐름으로 생각하고 또 약력을 전달하는 힘의 매개체인 보손입자를 찾아 낼 필요가 있다. 먼저 전자가 중성미자로 바뀌는 과정과 중성미자가 전자로 바뀌는 과정을 그려보자. 전자가 중성미자로 바뀌는 흐름은 전하가 증가하는 (또는 아이소스핀 제3성분이 증가하는) 흐름이므로 j_+^μ 로 쓰고, 중성미자가 전자로 바뀌는 흐름은 전하가 감소하는 (또는 아이소스핀 제3성분이 감소하는) 흐름이므로 j_-^μ 로 쓰기로 하자. 전하의 상태가 바뀌는 하전 약상호작용은 왼손지기 중성미자와 왼손지기 전자 사이에만 작용하므로 이 둘 두 약전류를 아래와 같이 나타낸다.

$$j_+^\mu = \bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L$$

$$j_-^\mu = \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L$$

QED와 비슷하게 약상호작용에서도 약 전하흐름과 상호작용을 하는 벡터장이 있다. QED에서는 전하흐름에 있어 전하의 변화가 없으니, 상호작용을 매개하는 장인 A_μ 역시 전하가 없었다. 그러나 약상호작용에서는 약 하전흐름에서 전하의 변화가 있으므로, 상호작용을 매개하는 장도 전하를 가진다. 보통 약전하흐름(j_\pm)에 대응하여 약상호작용을 매개하는 장을 W^\pm 라 쓴다.³ 전자가 중성미자로 바뀔 때는 음의 전하가 사라지므로, 약상호작용이 양의 전하를 전달해줘야 하고, 반대로 중성미자가 전자로 바뀔 때는 음의 전하가 생겨나는 것이 되므로, 약상호작용이 음의 전하를 전달해 줘야 할 것이다. 양의 전하를 전달하는 보손은 W^+ 가 꼭지점으로 들어오는 것으로 해석할 수 있고, W^- 를 내뱉는 것으로도 해석할 수 있다. 마찬가지로 음의 전하를 전달하는 것은 W^- 가 꼭지점으로 들어오는 것으로 볼 수도 있고, 다른 말로는 W^+ 를 내뱉는 것으로 생각해도 된다.

³ 책에 따라서는 j_+^μ 에 W_μ^- 을 j_-^μ 에 W_μ^+ 를 대응시키는 경우도 있다. 이는 W_μ^\pm 을 어떻게 정의하느냐의 문제이지, 최종 물리 결과는 똑같다.

위의 새로운 흐름 j_\pm^μ 과 매개 입자 W^\pm 를 바탕으로 약상호작용을 QED 상호작용과 매우 흡사한 구조로 파인만 도표를 아래와 같이 그릴 수 있다.

$$j_+^\mu = \bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L$$

$$\mathcal{L} = \frac{g}{\sqrt{2}} j_+^\mu W_\mu^+$$

$$j_-^\mu = \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L$$

$$\mathcal{L} = \frac{g}{\sqrt{2}} j_-^\mu W_\mu^-$$

10.2.2 약 아이소스핀 표현

왼손지기 전자와 왼손지기 중성미자를 한 입자의 아이소스핀 이중항 상태로 보고 둘을 합쳐서

$$\chi_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$$

로 표현하도록 하자. 이 때 아래와 같이 아이소스핀 성분을 올렸다가 내렸다가 하는 2×2 행렬을 정의하자.

$$\tau_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

이 올림(raising)과 내림(lowering) 연산자를 쓰면 약 초전하 흐름 j_+^μ 와 j_-^μ 은 약 아이소스핀 이중항을 써서 아래와 같이 통합적으로 표현 될 수 있다.

$$j_\pm^\mu = \bar{\chi}_L \gamma^\mu \tau_\pm \chi_L$$

여기서 잠시 파울리 행렬,

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

을 생각해보면, τ_+ 와 τ_- 는 각기 τ_1 와 τ_2 의 선형 결합으로 나타낼 수 있음을 알 수 있다.

$$\tau_+ = \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2), \quad \tau_- = \frac{1}{2}(\tau_1 - i\tau_2)$$

따라서,

$$j_\pm^\mu = \bar{\chi}_L \gamma^\mu \frac{\tau_1 \pm i\tau_2}{2} \chi_L$$

으로 표현된다. 이 때,

$$j_1^\mu = \bar{\chi}_L \gamma^\mu \frac{\tau_1}{2} \chi_L, \quad j_2^\mu = \bar{\chi}_L \gamma^\mu \frac{\tau_2}{2} \chi_L,$$

이란 새로운 정의를 도입하면 j_\pm^μ 는 각기 j_1^μ 와 j_2^μ 의 선형 결합으로 표현 될 수 있다.

$$j_+^\mu = \bar{\chi}_L \gamma^\mu \frac{\tau_1 + i\tau_2}{2} \chi_L = j_1^\mu + ij_2^\mu$$

$$j_-^\mu = \bar{\chi}_L \gamma^\mu \frac{\tau_1 - i\tau_2}{2} \chi_L = j_1^\mu - ij_2^\mu$$

4

$$j_1^\mu = \frac{j_+^\mu + j_-^\mu}{2}, \quad j_2^\mu = \frac{j_+^\mu - j_-^\mu}{2i}$$

⁴ 물론, 역으로 j_+^μ 와 j_-^μ 를 j_1^μ 와 j_2^μ 의 선형 결합으로도 표현할 수 있다.

만일 j_1^μ 과 j_2^μ 란 두 흐름과 상호작용을 하는 벡터장이 있어 이들을 각기 W_μ^1 과 W_μ^2 라 하면, 약한상호작용 라그랑지안은 아래와 같이 표현 될 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W &= g j^\mu \cdot W_\mu \\ &= g(j_1^\mu W_\mu^1 + j_2^\mu W_\mu^2) \\ &= g\left[\left(\frac{j_+^\mu + j_-^\mu}{2}\right)W_\mu^1 + \left(\frac{j_+^\mu - j_-^\mu}{2i}\right)W_\mu^2\right] \\ &= g\left[j_+^\mu \frac{1}{2}(W_\mu^1 - iW_\mu^2) + j_-^\mu \frac{1}{2}(W_\mu^1 + iW_\mu^2)\right] \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}}(j_+^\mu W_\mu^+ + j_-^\mu W_\mu^-) \end{aligned}$$

여기서 W^\pm 는 W^1 과 W^2 의 다음과 같은 선형 결합으로 정의하였다.

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)$$

10.2.3 약 중성 흐름(Weak neutral current)

$j_1^\mu (= \bar{\chi}_L \gamma^\mu \frac{\tau_1}{2} \chi_L)$ 과 $j_2^\mu (= \bar{\chi}_L \gamma^\mu \frac{\tau_2}{2} \chi_L)$ 가 각각 파울리 행렬 τ_1 과 τ_2 에 대응하여 만들어졌으므로, 이로부터 우리는 파울리 행렬 τ_3 에 대응하는

$$j_3^\mu = \bar{\chi}_L \gamma^\mu \frac{\tau_3}{2} \chi_L$$

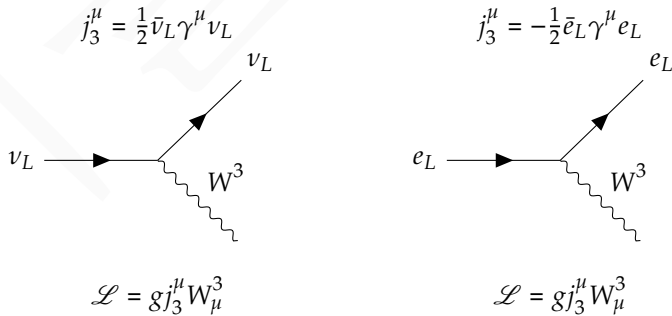
의 흐름도 존재 할 수 있다는 생각을 자연스럽게 할 수 있다.

j_3^μ 을 풀어 쓰다면,

$$\begin{aligned} j_\mu^3 &= \frac{1}{2}(\bar{\nu}_L \bar{e}_L) \gamma^\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L) \end{aligned}$$

으로, 이는 각기 중성미자의 흐름과 전자의 흐름을 뜻하고, 이에 대응하는 중성 약 상호작용이 존재한다는 이야기가 된다.

이를 파인만 도표로 그려본다면 아래와 같은 상호작용이 될 것이다.



여기서 특별히 눈여겨 볼 것은 W_μ^3 이 중성인 중성미자와 약한 상호작용을 한다는 것이다. 중성미자는 전하가 없으므로 전자기 상호작용은 할 수 없다. 한편 전자의 경우에는 전하가 있으므로 W_μ^3 이 약한상호작용일 수도 있고 전자기 상호작용일 수도 있다.

참고로 약 아이소스핀의 제3 성분($I_W^{(3)} = \pm\frac{1}{2}$)을 사용하고, 또 $u_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u$ 의 관계식을 쓰면, j_3^μ 을 한 개의 식으로 쓸 수 있다.

$$j_3^\mu = I_W^{(3)} \bar{f} \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)f$$

10.2.4 약 아이소스핀 $SU(2)_L$ 흐름

j_1^μ, j_2^μ 와 j_3^μ 가 각기 W_μ^1, W_μ^2 그리고 W_μ^3 와 약한 결합상수 g 를 가지고 상호작용을 한다고 보면 이들을 모두 모은 약 상호작용 라그랑지안은 아래와 같게 된다.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W &= g \mathbf{j}^\mu \cdot \mathbf{W}_\mu \\ &= g(j_1^\mu W_\mu^1 + j_2^\mu W_\mu^2 + j_3^\mu W_\mu^3) \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}}(j_+^\mu W_\mu^+ + j_-^\mu W_\mu^-) + g j_3^\mu W_\mu^3 \end{aligned}$$

10.3 약 초전하 흐름 (Weak Hypercharge Current)

양자전기동력학에서의 전류(j_{em}^μ)와 전기장(A_μ)과의 상호작용 라그랑지안은

$$\mathcal{L}_{em} = e j_{em}^\mu A_\mu$$

라 쓸 수 있다. 여기서 e 는 전하의 크기이면서 결합상수이기도 하다. 이에 비슷하게 약한상호작용에서도 약 초전하 흐름(j_Y^μ)과 그에 해당하는 벡터장(B_μ)과의 상호작용 라그랑지안을 생각해볼 수 있다.

$$\mathcal{L}_Y = g' \frac{1}{2} j_Y^\mu B_\mu$$

여기서는 g' 이 결합상수가 된다. 약 아이소스핀 흐름과 상호작용하는 벡터장과 약 초전하 흐름과 상호작용하는 벡터장이 같은 결합상수를 갖는다고 가정할 수는 없으므로 여기서는 g' 이라는 새로운 결합상수를 도입하였다.

10.4 전자기력과 약력의 통합 가능성

1967-1968년 경 와인버그와 살람은 전자기력과 약력을 통합 할 수 있는 게이지이론을 선보인다. 이 이론으로 전자기력과 약력은 합쳐서 전약력(Electroweak force)으로 불리게 된다. 전약력은 약 아이소스핀이 만드는 $SU(2)$ 군과 약 초전하가 만드는 $U(1)$ 군에 기초 한다. 이 두 군의 대칭성에서 나오는 벡터장이 각각 W_μ 와 B_μ 라 하면, 라그랑지안 에너지 밀도는 페르미온 흐름과 이 벡터 보존 장과의 곱으로 주어진다.

$$\mathcal{L} = gJ^\mu \cdot W_\mu + g' \frac{1}{2} J_Y^\mu B_\mu$$

여기서 J^μ 과 J_Y^μ 는 각각 페르미온의 약 아이소스핀과 약 초전하 흐름이고, g 와 g' 은 각각의 흐름들이 벡터장인 W_μ 와 B_μ 와의 결합상수이다.⁵ 이 라그랑지안을 전개해보면,

$$\mathcal{L} = gJ_1^\mu W_\mu^1 + gJ_2^\mu W_\mu^2 + gJ_3^\mu W_\mu^3 + g' \frac{1}{2} J_Y^\mu B_\mu$$

이 되고, 앞서 본 바와 같이 $J_\pm^\mu = (J_1^\mu \pm iJ_2^\mu)$, $W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)$ 로 정의하면, 이 라그랑지안은

$$\mathcal{L} = \frac{g}{\sqrt{2}}(J_+^\mu W_\mu^+ + J_-^\mu W_\mu^-) + gJ_3^\mu W_\mu^3 + g' \frac{1}{2} J_Y^\mu B_\mu$$

이 된다.⁶ 이 라그랑지안을 페르미온의 하전흐름에 의한 기여와 중성흐름에 의한 기여로 구별하여 써보자.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{CC} + \mathcal{L}_{NC} \\ \mathcal{L}_{CC} &= \frac{g}{\sqrt{2}}(J_+^\mu W_\mu^+ + J_-^\mu W_\mu^-) \\ \mathcal{L}_{NC} &= gJ_3^\mu W_\mu^3 + g' \frac{1}{2} J_Y^\mu B_\mu \end{aligned}$$

10.4.1 와인버그 각(Weinberg angle)

W_μ^1 과 W_μ^2 의 선형결합이 하전벡터장 W_μ^+ 와 W_μ^- 를 만들었듯이, W_μ^3 과 B_μ 의 선형결합으로 중성벡터장인 Z_μ 와 A_μ 를 만들면 좋겠다는 생각이 든다. 여기서 Z_μ 는 약한상호작용을 전달하는 Z^0 보존을, A_μ 는 전자기상호작용을 전달하는 가상광자 γ^* 의 장이다. 생각할 수 있는 가장 쉬운 방법은 W_μ^3 이 약력을 매개하는 벡터장 Z_μ 가 되고, B_μ 가 전자기력을 매개하는 벡터장 A_μ 가 되는 것이다. 이 경우 중성약한흐름은 g 를 결합 상수로 갖고, 하전흐름과 같이 왼손지기 페르미온과만 상호작용을 할 것이다. 또 g' 은 곧 전자기 상호작용의 결합상수 e 가 되면 된다.

문제는 자연이 그리 단순하게 설계되어 있지 않다는 것이다. 실험에 의하면 중성 약상호작용은 왼손지기 페르미온 뿐 아니라 오른손지기 페르미온에도 작용하기 때문이다.

⁵ g 와 g' 보다 g_W 와 g'_W 를 써서 약한상호작용의 결합상수임을 명시하는 것이 좋으나, 여기서는 밀첨자 W 자를 떼고 간략하게 g 와 g' 를 쓰기로 한다.

⁶ 물론 $W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \pm iW_\mu^2)$ 로 정의하면, 라그랑지안은

$$\mathcal{L} = \frac{g}{\sqrt{2}}(J_+^\mu W_\mu^- + J_-^\mu W_\mu^+) + gJ_3^\mu W_\mu^3 + g' \frac{1}{2} J_Y^\mu B_\mu$$

로 되어 J_\pm^μ 과 W_μ^\pm 의 부호가 엇갈려 곱해지는 것으로 나온다.

그래서 일단 Z_μ 와 A_μ 를 W_μ^3 과 B_μ 의 아래와 같은 선형결합으로 가정하자.

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu \\ A_\mu &= \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu \end{aligned}$$

여기서 θ_W 는 와인버그 각(Weinberg angle)이라 부른다. 와인버그 각 θ_W 의 밀첩자 W 는 약한상호작용의 섞임각(Weak mixing)을 뜻하기도 하고 와인버그의 이름을 뜻하기도 한다.

물론 역변환으로 W_μ^3 과 B_μ 을 아래와 같이 Z_μ 와 A_μ 로도 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} W_\mu^3 &= \cos \theta_W Z_\mu + \sin \theta_W A_\mu \\ B_\mu &= -\sin \theta_W Z_\mu + \cos \theta_W A_\mu \end{aligned}$$

10.4.2 중성흐름 부분

와인버그 섞임을 이용하여 중성 흐름부분의 라그랑지안을 전개해보자.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NC} &= gJ_3^\mu W_\mu^3 + g' \frac{1}{2} J_Y^\mu B_\mu \\ &= gJ_3^\mu (\cos \theta_W Z_\mu + \sin \theta_W A_\mu) + g' \frac{1}{2} J_Y^\mu (-\sin \theta_W Z_\mu + \cos \theta_W A_\mu) \\ &= \left[g \cos \theta_W J_3^\mu - g' \sin \theta_W \frac{1}{2} J_Y^\mu \right] Z_\mu + \left[g \sin \theta_W J_3^\mu + g' \cos \theta_W \frac{1}{2} J_Y^\mu \right] A_\mu \\ &\equiv g_Z J_Z^\mu Z_\mu + e J_{em}^\mu A_\mu \end{aligned}$$

윗 식의 맨 밑의 줄은 A_μ 와 Z_μ 에 대응하는 실제 흐름은 각기 전자기흐름인 J_{em}^μ 과 중성 약흐름인 J_Z^μ 가 되어함을 의미한다.

따라서 마지막 두 식을 비교하여,

$$\begin{aligned} g_Z J_Z^\mu &= g \cos \theta_W J_3^\mu - g' \sin \theta_W \frac{1}{2} J_Y^\mu \\ e J_{em}^\mu &= g \sin \theta_W J_3^\mu + g' \cos \theta_W \frac{1}{2} J_Y^\mu \end{aligned}$$

이 되어함을 알 수 있다.

여기서 먼저 우리가 잘 알고 있는 전자기 흐름 J_{em}^μ 을 고려해보자. 우선 $Q = \frac{1}{2}Y + I_W^3$ 의 관계식을 생각해보면, 그 흐름은 $J_{em}^\mu = \frac{1}{2}J_Y^\mu + J_3^\mu$ 이 되어야하므로, $g \sin \theta_W$ 와 $g' \cos \theta_W$ 가 둘 다 결합계수 e 가 되어야한다.

$$g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = e$$

이로부터 와인버그 각은,

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g}$$

임을 알 수 있다.

다음으로 중성 약 흐름 J_Z^μ 부분을 보자.

$$\begin{aligned} g_Z J_Z^\mu &= g \cos \theta_W J_3^\mu - g' \sin \theta_W \frac{1}{2} J_Y^\mu \\ &= g \cos \theta_W J_3^\mu - g \frac{\sin \theta_W}{\cos \theta_W} \sin \theta_W \frac{1}{2} J_Y^\mu \\ &= \frac{g}{\cos \theta_W} \left[\cos^2 \theta_W J_3^\mu - \sin^2 \theta_W \frac{1}{2} J_Y^\mu \right] \end{aligned}$$

이므로,

$$\begin{aligned} g_Z &= \frac{g}{\cos \theta_W} \\ J_Z^\mu &= \cos^2 \theta_W J_3^\mu - \sin^2 \theta_W \frac{1}{2} J_Y^\mu \end{aligned}$$

11 게이지 이론과 힉스 메커니즘

"양자장론으로 진공을 들여다 본다면, 진공은 진짜 아무것도 없는 곳이 아니다." - 피터 힉스
«When you look at a vacuum in a quantum theory of fields, it isn't exactly nothing.»
- Peter Higgs



Peter W. Higgs (1929-)

게이지 대칭성은 전자기학에서 잘 드러난다. 소위 전기포텐셜과 자기포텐셜에 게이지 변환을 취해도 전자기학에는 변화가 없다는 결론이다. 전자기학에서의 게이지 변환은 일반상대론에서 나오는 공변미분과 흡사한 구조를 가지고 있고, 이에 1918년 헤르만 바일(Hermann Weyl)은 전자기학과 일반상대성이론을 통합적으로 기술하기 위해 게이지 이론을 만든다. 이후 게이지 이론은 양자역학과 만나 양자전기역학(Quantum Electrodynamics) 뿐 아니라 약력과 강력도 포함하는 표준모형의 이론적 틀이 되었다. 한편 양자장론에서는 입자들간의 상호작용을 게이지 대칭성으로부터 얻어진 게이지 보손을 주고 받는 것으로 설명한다. 힉스 메커니즘은 이들 게이지 보손들이 어떻게 질량을 가질 수 있게 되는지를 설명하는 이론적 틀인데, 실제로 2012년 힉스 입자가 LHC에서 발견되면서 표준모형은 올바른 이론으로 자리 잡게 되었다.

- 목 차 -

| | | |
|--------|--|----|
| 11.1 | 게이지이론 | 15 |
| 11.1.1 | 전자기학에서의 게이지 대칭성 | 15 |
| 11.1.2 | U(1) 대칭성 | 16 |
| 11.1.3 | 양자전기역학 (Quantum Electrodynamics) | 18 |
| 11.1.4 | U(1) 게이지 이론의 확장 | 19 |
| 11.2 | 자발적 대칭성깨짐과 질량 | 20 |
| 11.2.1 | 스칼라장의 질량 | 20 |
| 11.2.2 | 자발적 대칭성 깨짐 (Spontaneous Symmetry Breaking) | 20 |
| 11.2.3 | 고차항을 갖는 스칼라 장 | 21 |
| 11.2.4 | 복소 스칼라 장을 갖는 포텐셜 | 22 |
| 11.3 | 힉스 메커니즘 | 24 |
| 11.3.1 | 로컬 U(1) 대칭성의 자발적 대칭성 깨짐 | 24 |
| 11.3.2 | 로컬 SU(2) 대칭성의 자발적 대칭성 깨짐 | 25 |
| 11.4 | GWS의 전약이론 | 26 |
| 11.4.1 | EW 최종 라그랑지안 | 26 |

11.1 게이지이론

11.1.1 전자기학에서의 게이지 대칭성

전자기학에서 전기장은 전기포텐셜 ϕ 의 기울기(gradient)로 나타난다. 보통 $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ 로 표시하며, 전기포텐셜의 단위가 V(Volt)이므로 전기장의 단위는 V/m임을 알 수 있다. 전기포텐셜은 + 전하로 다가갈수록 큰 값을 가지지만 전기장은 + 전극에서 - 전극을 향하므로, 위 식에서 음의 부호가 필요함을 알 수 있다. 자기장의 경우도 비슷하게 벡터 포텐셜(\vec{A})을 사용해 표현할 수 있다. 다만 자기장은 전류의 흐름에 수직으로 감싸도는 방향으로 생기므로 Curl 연산자로 표현된다. 즉, 전기장과 자기장을 각기 스칼라 포텐셜과 벡터 포텐셜을 써서 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}\end{aligned}$$

위 식에서 알 수 있듯이 전기장의 크기는 전기포텐셜의 기울기만으로 결정되지 전기포텐셜의 절대적인 크기는 아무 의미가 없다. 예를 들어 1V와 2V를 가진 두 전극이 1cm 떨어져 있다면 이들 사이에 형성된 전기장의 크기는 $(2V-1V)/0.01m = 100V/m$ 가 된다. 똑같이 101V와 102V 전극이 1cm 떨어져 있어도 전기장의 크기는 100V/m이다. 전기장의 크기는 이처럼 전기포텐셜의 절대값에 영향을 받는 것이 아니고 전기포텐셜 값의 변화 정도로 결정되는 것이다. 즉, $\phi \rightarrow \phi' = \phi + \phi_0$ 와 같이 포텐셜 값에 상수를 더해주는 변화를 주면 전기장에는 아무런 변화가 없게 된다. 이때 더해주는 ϕ_0 값은 전 지역에 같은 값을 더해줘도 되지만, 각 위치마다 다른 값을 더해줘도 전기장의 크기에는 변함이 없다. 지구위에 여러 도시가 있고, 각 도시마다 전기 포텐셜의 기준점을 어떻게 잡아도 전기장의 세기에는 변함이 없을 것이라 점을 생각해보면 이해하기가 쉬울 것이다.

마찬가지로 $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ 식을 보면, 벡터포텐셜에 임의의 함수 $\chi(x)$ 의 기울기 ($\vec{\nabla}\chi$)를 넣어도 자기장에 아무런 변화를 주지 않는다. 벡터항등식 $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}f = 0$ 에 따라,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\chi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\chi = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

이기 때문이다. 여기서 포텐셜에 변화를 주는 임의의 함수 $\chi(x)$ 의 값이 시공간의 각 장소마다 서로 다를 수 있으므로 이를 로컬 게이지 변환(Local gauge transformation)이라 부른다.

자, 이제 스칼라인 전기포텐셜과 벡터 포텐셜을 합쳐서 4-벡터로 포텐셜을 기술 해보자.

$$A^\mu = (\phi/c, \vec{A})$$

그러면 전자기장 텐서는 아래와 같이 4-벡터 포텐셜의 미분식으로 나타낼 수 있다.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

한편, 전기포텐셜과 자기포텐셜의 게이지 변환을 정리해 써보면,

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial\chi(x)}{\partial t} \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi(x)\end{aligned}$$

$\partial_\mu = (\frac{\partial}{c\partial t}, \vec{\nabla})$ 이므로, $\partial_\mu\chi = (\frac{\partial\chi}{c\partial t}, \vec{\nabla}\chi)$ 이고, $A_\mu = (\phi/c, -\vec{A})$ 이므로, $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\chi$ 를 풀어 쓰면 $\phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}$ 와 $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$ 가 된다.

이 되고, 이를 4-벡터 형식으로 묶어 쓰면,

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\chi(x)$$

이 된다. 이로부터 전자기장 $F_{\mu\nu}$ 가 로컬 게이지 변환에 대해 불변임을 아래와 같이 쉽게 보일 수 있다.

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} &\rightarrow F'_{\mu\nu} = \partial_\mu(A_\nu - \partial_\nu\chi(x)) - \partial_\nu(A_\mu - \partial_\mu\chi(x)) \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \cancel{(\partial_\mu\partial_\nu\chi(x))} + \cancel{\partial_\nu\partial_\mu\chi(x)} \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}\end{aligned}$$

결론적으로 전자기학은 로컬 게이지 변환에 대해 대칭성을 갖고 있다.

11.1.2 U(1) 대칭성

이번에는 양자역학에서 파동함수에 유니타리 변화를 주면 어떤 일이 벌어질까 생각해보자. U(1) 유니타리 변환은 파동함수에 위상을 변화시키는 것에 대응한다.

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\phi}\psi(x)$$

이는 파동함수를 전역에 걸쳐 같은 위상 만큼 변화시킬 경우로 볼 수 있다. 이를 글로벌 변환에 해당한다.

양자역학에서 어떤 연산자 A의 기대값은 $\langle A \rangle = \int \psi^\dagger(x)A\psi(x)dx$ 로 주어지므로,

$$\langle A \rangle = \int \psi^\dagger(x)A\psi'(x)dx = \int e^{-i\phi}\psi^\dagger(x)Ae^{i\phi}\psi(x)dx = \int \psi^\dagger(x)A\psi(x)dx$$

이 되어 기대값에 변화가 없게 된다. 따라서 물리적인 결과는 글로벌 U(1) 변환에 대해서 불변이다.

전자기학이 로컬 게이지 변환에 대해 불변이었음을 상기하면서, 파동함수의 위상이 어떤 함수 $\chi(x)$ 에 의해 각 위치마다 제각기 바뀐다고 가정해 보자. 그러면 양자역학이 전자기학처럼 로컬 게이지 변환에 의해 불변이 될까? 이를 알아보기 위해 파동함수에 로컬 U(1)변환을 취해보자.

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(x)\psi(x) = e^{iq\chi(x)}\psi(x)$$

그리고, 이 변환으로 인해 자유입자를 기술하는 디랙방정식 ($i\gamma^\mu\partial_\mu\psi = m\psi$)

이 어떻게 바뀌는지 알아보자.

$$\begin{aligned}
 i\gamma^\mu \partial_\mu \psi' &= m\psi' \\
 i\gamma^\mu \partial_\mu (e^{iq\chi(x)} \psi) &= m(e^{iq\chi(x)} \psi) \\
 e^{iq\chi(x)} i\gamma^\mu [\partial_\mu \psi + iq(\partial_\mu \chi(x))\psi] &= e^{iq\chi(x)} m\psi \\
 i\gamma^\mu (\partial_\mu + iq\partial_\mu \chi(x))\psi &= m\psi
 \end{aligned}$$

이 식에서 보는 바와 같이 로컬 U(1) 변환을 고려하면 디랙방정식 속에 $-q\gamma^\mu \partial_\mu \chi(x)\psi$ 의 항이 새로 생겨나서 불변이 되지 않는다.¹

¹ 글로벌 U(1) 변환인 경우는 $\chi(x)$ 가 상수이어서 이 항은 0이 된다. 따라서 디랙 방정식은 글로벌 U(1) 게이지 변환에 대해서는 불변임을 쉽게 보여 줄 수 있다.

디랙 방정식이 로컬 U(1) 대칭성을 갖게 하기 위한 처방

그렇다면 디랙방정식이 로컬 U(1)대칭성을 갖게 하기 위해서는 어떠한 조건이 필요한 지 알아보자. 당연히 로컬 위상 변환을 한 뒤에 생겨나는 $-q\gamma^\mu \partial_\mu \chi(x)\psi$ 항이 사라져야 할 것이다. 그런데 디랙방정식을 변환시킨 후에 나타나는 $(\partial_\mu + iq\partial_\mu \chi(x))$ 의 모양을 보면, 전자기학에서 나타나는 게이지변환 꼴과 매우 흡사함을 알 수 있다. 만약 $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + iqA_\mu \equiv D_\mu$ 의 형태로 미분을 새롭게 정의한다면 어떻게 될까? 그러면 전자기학에서의 게이지변환에 의해,

$$D'_\mu = \partial_\mu + iqA'_\mu = \partial_\mu + iq(A_\mu - \partial_\mu \chi(x)) = \partial_\mu + iqA_\mu - iq\partial_\mu \chi(x) = D_\mu - iq\partial_\mu \chi(x)$$

이 된다. 즉, 새롭게 정의된 미분 D_μ 는 로컬 U(1) 변환에 대해 불변이 됨을 의미한다.

따라서 이런 방식으로 4-벡터 미분에 변화를 준 D_μ 를 써서, 디랙방정식을 $i\gamma^\mu D_\mu \psi = m\psi$ 이라고 새롭게 고쳐 쓰면, 이 새로운 디랙방정식은,

$$\begin{aligned}
 (i\gamma^\mu D_\mu \psi = m\psi) &\rightarrow i\gamma^\mu D'_\mu \psi' = m\psi' \\
 i\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu - iq\partial_\mu \chi)(e^{iq\chi} \psi) &= m(e^{iq\chi} \psi) \\
 i\gamma^\mu (\partial_\mu + iq\partial_\mu \chi + iqA_\mu - iq\partial_\mu \chi)\psi &= m\psi \\
 i\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu)\psi &= m\psi \\
 i\gamma^\mu D_\mu \psi &= m\psi
 \end{aligned}$$

가 되어 로컬 U(1) 위상변환에 대해 불변인 방정식이 된다.

따라서 로컬 U(1)대칭성을 갖는 디랙방정식은

$$\begin{aligned}
 i\gamma^\mu D_\mu \psi - m\psi &= 0 \\
 i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi - q\gamma^\mu A_\mu \psi &= 0
 \end{aligned}$$

으로 쓸 수 있다.

$q\gamma^\mu A_\mu \psi$ 의 항이 방정식 안에 들어 있는 것은 실로 매우 의미 심장하다. 왜냐하면 $q\gamma^\mu A_\mu \psi$ 은 전자기 포텐셜을 나타내는 게이지장(A_μ)과 입자를 나타내는 페르미온 장(ψ)이 상호작용하는 항을 뜻하기 때문이다. 즉 로컬 U(1)

대칭성을 디랙방정식에 요구하기만 하면, 전자기학이 자동적으로 포함되어 나온다는 얘기가 된다.

이쯤에서 여러분들이 이 이야기에서 전율을 느꼈다면 매우 다행이다. 왜냐하면 전자기력을 포함시킨 상대론적 양자역학이 바로 로컬 U(1) 게이지 이론이란 것을 이해한 것이기 때문이다. 바로 이것이 양자전기역학 (Quantum Electrodynamics)을 이해하는 첫 걸음이다.

양자전기역학에 의하면 전자기 상호작용은 입자들의 장을 나타내는 $\psi(x)$ 와 전자기장을 대변하는 A_μ 가 만나는 항으로 나타난다. 즉, A_μ 를 전자기력을 전달하는 장으로 해석한다는 이야기다. 이 장이 게이지 대칭성을 유지하게 만들어 주므로 이를 게이지 장 또는 게이지 입자라 불러도 좋다. 결론적으로 게이지 이론에 따르면 힘이란 이런 게이지 입자를 주고 받으면서 생기는 결과다.

전자기력을 기술하는 U(1) 게이지 이론에 나타나는 게이지 장 A_μ 를 가상 광자(virtual photon)라 부른다. 예를 들면 전자와 전자 사이의 상호 작용을 매개하는 것이 바로 이 가상 광자다. 물론 이 가상 광자는 한쪽 전자에서 출발하여 다른 전자에 흡수 될 때까지 아주 짧은 시간 동안만 존재한다. 따라서 실험적으로는 이 가상 광자를 검출해 낼 수 없다. 그렇다고 이 가상 광자가 날아 갈 수 있는 거리에 어떤 제한이 있는 것은 아니다. 이론적으로는 가상광자가 무한대까지 날아 갈 수 있고 그래서 전자기력이 미치는 힘의 범위는 무한대까지다.

11.1.3 양자전기역학 (Quantum Electrodynamics)

디랙방정식이 주는 가장 중요한 결과 중 하나는 전하를 가지고 있는 입자를 기술하는 해가 하나 존재하면, 반드시 질량은 같고 전하가 반대인 반입자를 나타내는 해도 쌍으로 나온다는 것이었다. 처음에는 이 반입자에 대한 해가 불편한 존재였지만, 1932년 칼 앤더슨(Carl Anderson)이 우주선(Cosmic ray) 실험을 통해 양전자를 발견하면서 디랙 방정식은 반입자의 존재를 예견한 옳바른 식으로 인정받게 되었다. 이 업적으로 디랙은 1933년 슈뢰딩거와 함께 노벨상을 받고, 앤더슨은 최초의 반입자인 양전자의 발견으로 1936년 노벨상을 받았다. 양자전기역학은 광자와 전자의 산란, 전자와 전자의 산란, 또는 전자와 양전자의 쌍소멸과정 등을 설명하는데 적극 활용되었다. 하지만 초창기 양자전기역학은 이론적으로 문제점이 있었다. 전자기 상호작용을 일으키는 가능한 모든 가상 광자의 기여를 합하면 계산 결과가 무한대가 되는 치명적인 결함이 있었던 것이다. 이 문제를 재규격화를 통해 해결한 것은 파인만과 슈윙거, 그리고 도모나가였다. 이로써 양자전기역학은 전자기 현상을 기술하는 완전한 이론으로 자리잡았다.

11.1.4 U(1) 게이지 이론의 확장

전자기력을 로컬 U(1) 게이지 이론으로 잘 기술할 수 있음을 보였으니, 이제 약력과 강력도 다른 대칭군을 통해 게이지 이론으로 만들수 있는지 궁금해졌을 것이다. 사실 로컬 U(1) 게이지 이론을 SU(2) 나 SU(3) 대칭군으로 확장하는 것은 계산만 복잡할 뿐 어려운 일은 아니다. SU(2) 대칭군에서는 위상 변환을 파울리 행렬을 써서 표현 할 수 있고, SU(2) 대칭군에서는 QCD 공부에서 본 바와 같이 겐만-행렬을 써서 나타낼 수 있다. SU(2)와 SU(3) 대칭군으로 확장된 게이지 이론의 결과를 정리하면 아래와 같다.

| 대칭군 | U(1) | SU(2) | SU(3) |
|-----------|--|--|--|
| 대칭군의 성격 | $U^\dagger U = 1$ | $U^\dagger U = 1, \det(U) = 1$ | $U^\dagger U = 1, \det(U) = 1$ |
| 스피너 | ψ | $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ | $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$ |
| 페르미온 장 변환 | $\psi'(x) = e^{iq\chi(x)}\psi(x)$ | $\psi'(x) = e^{iq\vec{\tau}\cdot\vec{\chi}(x)}\psi(x)$ ($\vec{\tau}$ =파울리 행렬) | $\psi'(x) = e^{iq\lambda_a\chi^a(x)}\psi(x)$ (λ_a =겐만 행렬) |
| 공변미분 | $D_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu$ | $D_\mu \equiv \partial_\mu + iq\vec{\tau}\cdot\vec{W}_\mu$ | $D_\mu \equiv \partial_\mu + iq\lambda_a G_\mu^a$ |
| 스피너의 변환 | $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\chi(x)$ | $\vec{W}'_\mu = \vec{W}_\mu - \partial_\mu\vec{\chi}(x) - 2q(\vec{\chi}\times\vec{W}_\mu)$ | $G_\mu^a = G_\mu^a - \partial_\mu\chi^k - qf_{aij}\chi^i G_\mu^j$ |
| 게이지 장 텐서 | $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ | $F_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - 2q(\vec{W}_\mu\times\vec{W}_\nu)$ | $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - qf_{abc}G_\mu^b G_\nu^c$ |
| 흐름 | $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ | $\vec{j}^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\frac{\vec{\tau}}{2}\psi$ | $j_a^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\lambda_a\psi$ |
| 상호작용 항 | $-qj^\mu A_\mu$ | $-q\vec{j}^\mu\cdot\vec{W}_\mu$ | $-qj_a^\mu\psi G_\mu^a$ |

11.2 자발적 대칭성깨짐과 질량

상호작용을 전달하는 가상입자의 질량이 0인 전자기력과 강력은 U(1)군과 SU(3) 군을 통해 게이지 이론으로 기술하는데는 문제가 없어 보인다. 만약 이 가상입자에 질량이 있다면 가상입자가 만들어지는 것은 더욱 힘들어지고 또 불확정성의 원리에 따라 질량이 클수록 더 짧은 시간만 존재하게 된다. 그래서 질량을 가진 가상입자가 미치는 힘의 범위는 매우 짧다.

SU(2) 대칭성을 잘 활용하여 약력을 기술하는 게이지 이론을 만들때 생기는 문제가 바로 이 질량이다. SU(2) 게이지 이론 자체로 보면 U(1)군과 SU(3)군 때와 마찬가지로 가상입자의 질량이 0일 수 밖에 없기 때문이다. 그럼 게이지 입자가 질량을 갖게 하기 위해서는 어떻게 이론을 수정해야 할까? 그 힌트를 클라인-고든 라그랑지안에서 찾을 수 있다.

11.2.1 스칼라장의 질량

클라인-고든 방정식($(\partial^2 + m^2)\psi = 0$)은 스핀이 없는 스칼라 장에 대한 상대론적 양자역학 방정식이다.² 이 클라인-고든 방정식을 만들어내는 라그랑지안은 아래와 같다.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2$$

여기서 $\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)$ 항은 운동 에너지 밀도에 해당하고, $\frac{1}{2}\mu^2\phi^2$ 을 포텐셜 에너지 밀도로 볼 수 있다. 바로 이 클라인-고든 라그랑지안에서 포텐셜을 나타내는 함수 ($V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2$ 의 계수인 μ 가 클라인-고든 방정식에서의 질량 m 에 해당한다. 이 라그랑지안에 포함된 포텐셜에 해당하는 항의 꼴은 양자역학에서 나오는 조화진동자의 포텐셜 함수와 같다. 양자역학에서 이러한 스칼라 장이 주어지면 입자는 0의 에너지를 가질 수 없고, $\frac{1}{2}h\nu$ 의 기본 에너지를 가짐을 알고 있다. 이렇게 스칼라 장을 도입하여 입자들에게 질량을 부여하는 방법을 게이지이론에 포함시켜 볼 수는 없을까? 그 해답이 바로 '자발적 대칭성 깨짐'이란 아이디어에서 나온다.

11.2.2 자발적 대칭성 깨짐 (Spontaneous Symmetry Breaking)

'자발적 대칭성 깨짐'은 Spontaneous Symmetry Breaking을 우리말로 번역한 것이다. 일단 말 자체가 어색하기 그지없다. 우선 '대칭성'이란 말은 그리 어렵지 않다. 거울 대칭성, 회전 대칭성 등의 말에서 알 수 있듯이 어떤 변환에 대해 물리적 상태가 변하지 않는 경우 대칭적이라 부른다. 따라서 '대칭성 깨짐'이란 원래 가지고 있었던 대칭성이 사라지는 것을 뜻한다.

예를 들어 보자. 가장 쉬운 예는 자석이다. 먼저 원자들을 하나의 단위 자석이라 생각해보자. 이들 원자 자석들이 아무렇게나 임의 방향으로 무작위적으로 뭉쳐 결정을 이루었다면, 이 물질은 전체적으로 자성을 띄지 않을

² ∂^2 은 $\partial^\mu\partial_\mu$ 를 간단히 쓴 것으로, 보통의 책에서는 \square 로 표기하는 달람베르 연산자 (d'Alembert operator)이다.

것이다. 일반적으로 자석을 만드는 물질들의 특징은 내부의 원자자석들이 나란히 정렬되어 있다는 점이다. 원자 자석들이 모두 한 방향으로 정렬되어 있어 큰 자성을 띄게 되는 것이다.

이런 자성물질에 열을 가해 뜨겁게 만들면 내부의 원자 자석들이 제멋대로 방향을 틀면서 자성을 잃어버리게 된다. 그런데 바로 여기에 재미난 현상이 하나 나타난다. 자성을 잃어버린 이 물질을 그대로 식히면 원자 자석들이 다시 한 방향으로 정렬하면서 다시 자성을 얻게 된다. 그렇다고 회복된 자성이 완벽하게 원래의 자성과 같아진다는 보장은 없다. 특히 자석의 방향이 달라질수 있다. 식은 뒤에 만들어지는 자석의 방향이 꼭 원래 향했던 자석의 방향과 같아지는 것이 오히려 더 힘들 것이다.

자, 여기서 바로 '대칭성 깨짐'을 이해 할 수 있다. 자성이 없던 상태는 회전에 대해 대칭성을 가지고 있었다. 그런데 온도가 내려가면 어느 방향 인지는 알 수 없지만 하여간 특정한 방향을 향하는 자석이 되면서 회전 대칭성이 깨지게 된다.

이 과정에서 나타나는 '대칭성 깨짐'은 스스로 일어난 현상이다. 자석의 방향을 인위적으로 또는 물리적으로 외부에서 힘을 가해 만들어 주지 않았지만, 온도가 내려가면서 스스로 대칭성이 깨진 것이다. 그래서 이러한 현상을 '자발적 대칭성 깨짐'이라 부른다.

바로 여기서 힌트를 얻은 것이다. 게이지 대칭성을 가진 시스템에서 나타나는 게이지 보존들은 원래 질량이 없었다. 혹시 어떤 이유로 이 대칭성이 스스로 깨져서 게이지 보존들이 질량을 갖는 것들과 질량을 갖지 않는 것들로 변할 수 있지는 않을까? 전약이론(Electroweak theory)는 바로 이 '자발적 대칭성 깨짐'을 이용해 게이지 보존에 질량을 부여한다. 자 이제부터 그 자세한 내용을 알아보기로 하자.

11.2.3 고차항을 갖는 스칼라 장

앞서 클라인-고든 라그랑지안에서 본 포텐셜 $\frac{1}{2}\mu^2\phi^2$ 에 $\frac{1}{4}\lambda\phi^4$ 이 추가로 더 있는 포텐셜 $V(\phi)$ 를 생각해보자. ³ 왜 이러한 포텐셜을 가정하는 가는 지금 따지지 말도록 하자. 그러면 라그랑지안은

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - V(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \left(\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4\right)$$

이라 쓸 수 있다. 가장 먼저 알 수 있는 사실은 $\lambda = 0$ 인 경우 이 라그랑지안은 그대로 클라인-고든 라그랑지안이 되어 스칼라 장 ϕ 의 질량은 μ 가 된다는 점이다. $\lambda < 0$ 인 경우를 따져보면, x 가 커짐에 따라 포텐셜이 빠르게 $-\infty$ 가 되므로 이 라그랑지안은 물리적인 의미를 가질 수 없다. 따라서 물리적으로 안정된 해를 가질 수 있는 경우는 $\lambda \geq 0$ 인 경우 뿐이다.

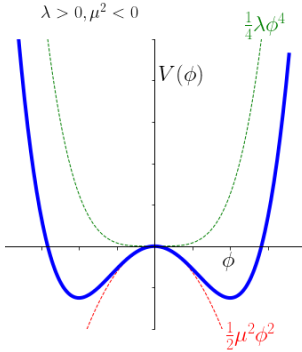
$\lambda > 0$ 인 경우 중, $\mu^2 > 0$ 인 경우는 안정된 해를 구할 수 있지만 그다지 흥미로운 경우는 아니다. 클라인-고든 라그랑지안과 별반 다를 바가 없을 것이다. 재미있는 일은 $\mu^2 < 0$ 일 때 벌어진다.

자발적 대칭성 깨짐을 설명하기 위해 흔히 들 사용하는 또 다른 예는 원탁에 둘러앉아 식사를 할 때 생기는 현상이다. 보통은 '좌뺑우뺑'이라고 외우고 들어가서 혼란은 생기지 않는다. 원탁에 앉은 사람들이 일제히 왼쪽에 놓여진 빵을 먹고 오른쪽에 놓여진 물 잔을 들면 혼란은 없다. 사실 모두가 원탁에 앉아 식사 시작을 기다릴때는 대칭성이 있는 상태였다. '좌뺑우뺑'은 혼란을 피하기 위해 만든 약속이지 꼭 그 약속을 지켜야 한다는 법은 없다. 만약 식사 시작과 함께 한 사람이 오른쪽의 빵을 집고 왼쪽의 물 잔을 들었다면 어떻게 될까? 모든 사람이 차례로 '우뺑좌뺑'을 선택할 수 밖에 없게 될 것이다. 아니면 누군가는 빵이 없거나 물 잔을 들 수 없는 상황이 벌어진다. 이 경우도 원래 있던 대칭성이 스스로 '좌뺑우뺑'이나 '우뺑좌뺑' 상태로 변한 것이니 '자발적 대칭성 깨짐'이라 표현할 수 있다.

³ ϕ^4 이상의 고차항 포텐셜은 다루지 않는다. ϕ^4 까지만 재규격화가 가능하다고 알려져 있다.

이 경우 포텐셜을 미분하여 극값을 찾아보면

$$V'(\phi) = \mu^2\phi + \lambda\phi^3 = \phi(\mu^2 + \lambda\phi^2) = 0$$



$\lambda > 0$ 이고 $\mu^2 < 0$ 인 경우 $V(\phi)$ 의 개형

을 만족하는 ϕ 값은 0이거나 $\pm\sqrt{-\mu^2/\lambda}$ 일 때다. 제곱근 안에 음의 부호가 있지만 괜찮다. 왜냐하면 지금 우리는 $\mu^2 < 0$ 인 경우를 생각하고 있기 때문이다. 이제 $v \equiv \sqrt{-\mu^2/\lambda}$ 로 정의하고, $\phi(x) = v$ 을 원점으로 하는 좌표 $\eta(x)$ 를 생각하면,

$$\eta(x) = \phi(x) - v$$

가 된다.

따라서 원 라그랑지안에 들어 있는 $\phi(x)$ 를 모두 $\eta(x) + v$ 로 대체하면,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 - \frac{1}{2}\mu^2(\eta+v)^2 - \frac{1}{4}\lambda(\eta+v)^4 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 - \frac{1}{2}\mu^2(\eta^2 + 2v\eta + v^2) - \frac{1}{4}\lambda(\eta^4 + 4\eta^3v + 6\eta^2v^2 + 4\eta v^3 + v^4) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 - \lambda v^2\eta^2 - \lambda v\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda\eta^4 + \frac{1}{4}\lambda v^4 \end{aligned}$$

을 얻을 수 있다.

먼저 눈에 띄는 것은 η 장이다. η 는 $\lambda v^2\eta^2$ 항을 곱해 두고 있어, 이 항이 마치 클라인-고든 라그랑지안에서의 질량항의 역할을 한다. 따라서 η 장의 질량을 $\sqrt{2\lambda v^2}$ 으로 해석할 수 있다. $\lambda v\eta^3$ 과 $\frac{1}{4}\lambda\eta^4$ 은 각기 η 장 세 개가 만나는 상호작용과 네 개가 만나는 상호작용을 뜻한다. 맨 끝에 나오는 $\frac{1}{4}\lambda v^4$ 는 λ 나 v 나 둘 다 상수이므로 이 항도 상수이고, 라그랑지안에서 상수는 아무런 역할을 하지 못한다는 것을 잘 알고 있으므로 신경 쓸 필요가 없는 항이 된다.

$$m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$$

11.2.4 복소 스칼라 장을 갖는 포텐셜

앞에서 한 논의를 두 개의 스칼라 장 성분을 가진 복소 스칼라 장으로 확대해 보자. 우선 스칼라 장을 아래와 같이 쓰도록 하자.

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$$

이 경우 $\phi^*\phi = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2)$ 이 된다.

만약 포텐셜 항이

$$\mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2$$

으로 주어진다면, 이 라그랑지안은 한 개의 스칼라 장 문제와 유사한 모습을 띈다.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4} \lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2\end{aligned}$$

이 포텐셜의 최저점을 $v = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$ 로 놓았을 때 $\phi_1^2 + \phi_2^2 = v^2$ 을 만족하는 원위의 점들이 된다. 여기서 v 가 한 개의 스칼라 장만 가진 경우와 같음에 주목하자.

특별히 $\phi_1 = v$ 이고 $\phi_2 = 0$ 인 최저점을 택해 새로운 장인 $\eta(x) = \phi_1(x) - v$ 와 $\zeta(x) = \phi_2$ 를 도입하면, $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \eta(x) + i\zeta(x)]$ 가 되고, 라그랑지안의 스칼라 장 ϕ_1 과 ϕ_2 를 모두 η 와 ζ 로 치환하면,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \zeta)^2 + \frac{1}{2} \lambda v^2 ((\eta + v)^2 + \zeta^2) - \frac{1}{4} \lambda ((\eta + v)^2 + \zeta^2)^2 \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \zeta)^2 + \frac{1}{2} \lambda v^2 \eta^2 + \lambda v^3 \eta + \frac{1}{2} \lambda v^4 + \frac{1}{2} \lambda v^2 \zeta^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} \lambda \eta^2 - \lambda v \eta^3 - \frac{3}{2} \lambda v^2 \eta^2 - \lambda v^3 \eta - \frac{1}{4} \lambda v^4 - \frac{1}{2} \lambda \eta^2 \zeta^2 - \lambda v \eta \zeta^2 - \frac{1}{2} \lambda v^2 \zeta^2 - \frac{1}{4} \lambda \zeta^4 \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \zeta)^2 - \lambda v^2 \eta^2 - \lambda v (\eta^3 + \eta \zeta^3) - \frac{1}{4} \lambda (\eta^4 + \zeta^4 + 2\eta^2 \zeta^2) + \frac{1}{4} \lambda v^4\end{aligned}$$

이 된다.

이 라그랑지안에 나타나는 중요한 항은 $\lambda v^2 \eta^2$ 의 항으로 이는, η 장이 질량 $\sqrt{2\lambda v^2}$ 을 가짐을 나타낸다.

$$m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$$

복소장을 택하므로써 달라진 점은 η 장과 ζ 장이 세 개 씩, 또는 두 개씩 짝을 지어, 또 4개 씩 만나는 여러가지 상호작용 항들이 나온다는 점이다.

11.3 힉스 메커니즘

11.3.1 로컬 U(1) 대칭성의 자발적 대칭성 깨짐

로컬 U(1) 대칭성을 가진 게이지 장에서 나온 라그랑지안에 복소 스칼라 장을 도입하여 보자. 현재 우리는 점차 와인버그와 살람이 만든 전약이론에 한 걸음씩 다가가고 있다. 자세한 전개는 독자에게 맡기고 결과만 써보면,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (\partial^\mu - iqA^\mu)\phi^*(\partial_\mu + iqA_\mu)\phi - \mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\zeta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 - \lambda v^2\eta^2 + \frac{1}{2}q^2v^2A^\mu A_\mu + qvA_\mu\partial^\mu\zeta + \dots\end{aligned}$$

이 되고, 이로부터

$$m_\zeta = 0$$

$$m_\eta = \sqrt{2\lambda}v$$

$$m_A = qv$$

의 항이 나와 질량이 0인 스칼라 장 ζ 와 질량을 갖는 스칼라 장 η , 그리고 원하던대로 게이지 보손 A_μ 가 질량 qv 를 갖게 되었다.

게이지 장 A_μ 가 질량을 갖게 된 것은 매우 고무적이나, 문제는 질량이 0인 골드스톤 보손인 스칼라 장 ζ 가 무엇이냐는 것이다. 게다가 $A_\mu\partial^\mu\zeta$ 항은 이 질량이 0인 스칼라 장이 게이지 장과 직접 상호작용을 한다는 것을 의미한다. 그리고 사실 U(1) 게이지 이론은 전자기력을 다루는 것이고 모두가 알다시피 게이지 보손 A_μ 인 광자는 질량이 0이어야 한다. 따라서 이 라그랑지안은 우리가 관찰하는 자연을 기술하고 있지는 않다.

여기서 재미난 트릭을 한번 해보자. 포텐셜의 최저값 중 하나를 정해 이동하는 좌표 변환은

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta + i\zeta)$$

였다. η 와 ζ 가 매우 작을 경우, 이 변환은

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta)e^{i\zeta/v}$$

로 쓸 수 있다. 이런 형태를 가진 새로운 변환을 생각해보면

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h(x))e^{i\theta(x)/v}$$

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{qv}\partial_\mu\theta(x)$$

가 되고 이때의 라그랑지안은

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \lambda v^2 h^2 + \frac{1}{2}q^2v^2 A_\mu^2 - \lambda v h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4 \\ &\quad + \frac{1}{2}q^2 A_\mu^2 h^2 + vq^2 A_\mu^2 h + \dots\end{aligned}$$

이 되어 더 이상 질량이 0인 골드스톤 보손이 나오지 않는다. 그래서 남은 것을 질량을 가진 게이지 보손 A_μ 와 $\sqrt{2\lambda v^2}$ 의 질량을 갖는 스칼라 장 $h(x)$ 만 남는다. 우리는 이 $h(x)$ 를 힉스 장이라 부를 것이다.

11.3.2 로컬 SU(2) 대칭성의 자발적 대칭성 깨짐

| | 스칼라 장 | U(1) | SU(2) |
|-------|--|--|--|
| 라그랑지안 | $\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi)$ | $\mathcal{L} = (i\partial_\mu - q\vec{A}_\mu)\phi ^2 - V(\phi)$ | $\mathcal{L} = (i\partial_\mu - g\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu)\phi ^2 - V(\phi)$ |
| 포텐셜 | $\mu^2 \phi^* \phi + \lambda(\phi^* \phi)^2$ | $\mu^2 \phi^* \phi + \lambda(\phi^* \phi)^2$ | $\mu^2 \phi^* \phi + \lambda(\phi^* \phi)^2$ |
| 스칼라 장 | $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ | $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ | $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \psi_3 + i\psi_4 \end{pmatrix}$ |
| 최저점 | $\phi^* \phi = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) = v^2$ $v \equiv \sqrt{-\mu^2/\lambda}$ | $\phi^* \phi = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) = v^2$ $v \equiv \sqrt{-\mu^2/\lambda}$ | $\phi^* \phi = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \psi_3^2 + \psi_4^2) = v^2$ $v \equiv \sqrt{-\mu^2/\lambda}$ |
| 진공 | $\phi_1 = v, \phi_2 = 0$ | $\phi_1 = v, \phi_2 = 0$ | $\phi_1 = \phi_2 = \psi_3 = \psi_4 = 0, \psi_3 = v$ |
| 좌표 이동 | $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta(x) + i\zeta(x))$ | $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h(x))e^{i\theta(x)/v}$ | $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} e^{i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}(x)/v}$ |
| 질량 | $m_\zeta = 0$ $m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2}$ | $m_h = \sqrt{2\lambda v^2}$ $m_A = qv$ | $m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2}$ $m_W = \frac{1}{2}gv$ |

11.4 GWS의 전약이론

| | SU(2) x U(1) |
|-------|--|
| 라그랑지안 | $\mathcal{L} = (i\partial_\mu - g\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu - g'\frac{Y}{2}B_\mu)\phi ^2 - V(\phi)$ |
| 포텐셜 | $\mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2$ |
| 스칼라 장 | $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \psi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}$ |
| 최저점 | $\phi^*\phi = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) = v^2$ $v \equiv \sqrt{-\mu^2/\lambda}$ |
| 진공 | $\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0, \phi_3 = v$ |
| 좌표 이동 | $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} e^{i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}(x)/v}$ |
| 질량 | $m_h = \sqrt{2\lambda}v^2$ $m_W = \frac{1}{2}gv$ $m_Z = \frac{1}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}v$ $m_A = 0$ |

11.4.1 EW 최종 라그랑지안

$$\mathcal{L}_{EW} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_h + \mathcal{L}_Y$$

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4}\vec{W}^{\mu\nu} \cdot \vec{W}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L}_f = \bar{\chi}_L \gamma^\mu \left[i\partial_\mu - g\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu - g'\frac{Y}{2}B_\mu \right] \chi_L + \bar{e}_R \gamma^\mu \left[i\partial_\mu - g'\frac{Y}{2}B_\mu \right] e_R$$

$$\mathcal{L}_h = |(i\partial_\mu - g\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu - g'\frac{Y}{2}B_\mu)\phi|^2 - (\mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2)$$

\mathcal{L}_Y 는 페르미온 입자와 힉스장과의 결합을 통해 페르미온의 질량을 주는 라그랑지안으로 다음 섹션에서 다룬다.